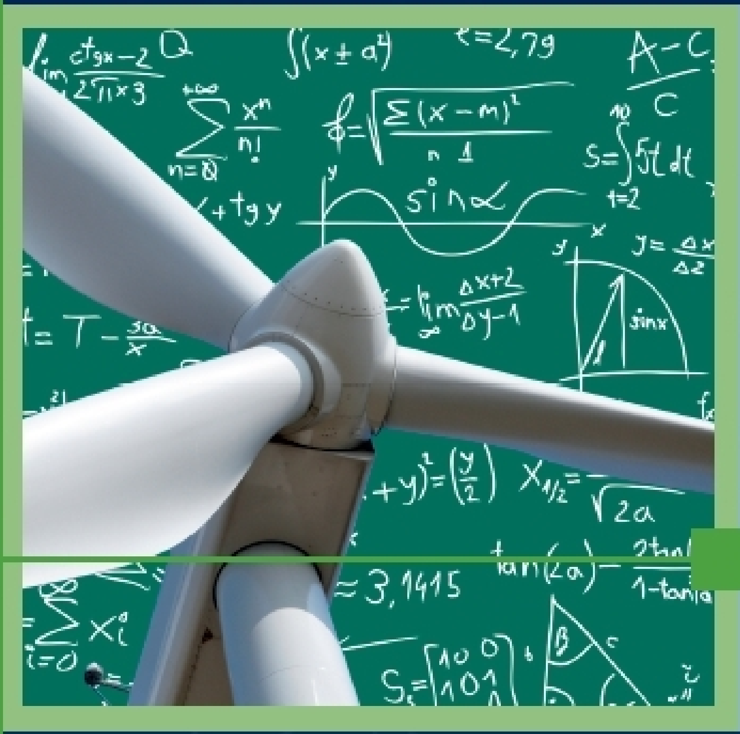
Errata

11.03.2016

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Mathematik

für das Ingenieurstudium



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Satz 1.5 (Binomischer Satz)

Für jede natürliche Hochzahl n und beliebige Zahlen a und b gilt die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Beispiel 1.16 (Binomischer Satz)

a) $(x-1)^3 = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1.$

b) $(x+2)^4 = x^4 + 4 \cdot 2\,x^3 + 6 \cdot 2^2\,x^2 + 4 \cdot 2^3\,x + 1.$ ■

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen a und b gelten die binomischen Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.4 Trigonometrie

Die Trigonometrie ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Dreiecken beschäftigt. Wir werden in diesem Abschnitt Zusammenhänge zwischen den Längen der Kanten und den Winkeln eines Dreiecks aufzeigen.

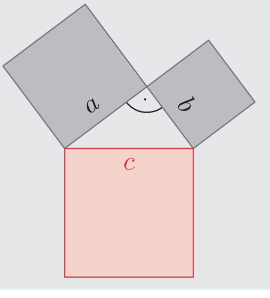
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck besteht ein Zusammenhang zwischen den Längen der einzelnen Dreiecksseiten. Dieser Zusammenhang wurde bereits in der Antike erkannt und ist heute unter dem, nach dem griechischen Mathematiker und Philosophen *Pythagoras* benannten Satz bekannt. Es gibt viele verschiedene Varianten, diesen Satz zu beweisen. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf eine Herleitung.

Satz 1.6 (Satz des Pythagoras)

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Zwischen der Länge der Hypotenuse c und den Längen der beiden Katheten a und b gilt die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Beispiel 1.23 (Ungleichungen)

a) Die Ungleichung

$$-2\,x^2 + 4\,x < -6$$

ist für alle x-Werte definiert. Zur Bestimmung der Lösungsmenge berechnen wir zunächst die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$-2\,x^2 + 4\,x + 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-4} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Jetzt testen wir die Bereiche für x-Werte, die kleiner als -1 sind, für x-Werte zwischen -1 und 3 und für x-Werte, die größer als 3 sind. Wir können beispielweise die Kandidaten $x = -2$, $x = 0$ und $x = 4$ testen:

$$\underbrace{-2\,(-2)^2 + 4\,(-2)}_{-16} < -6, \quad \underbrace{-2\,(0)^2 + 4\,(0)}_{0} < -6, \quad \underbrace{-2\,(4)^2 + 4\,(4)}_{-16} < -6.$$

Nur die beiden Kandidaten $x = -2$ und $x = 4$ haben den Test bestanden. Somit besteht die Lösungsmenge aus den beiden Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(3, \infty)$.

b) Die Ungleichung

$$\frac{2}{x-4} \le \frac{1}{x+2}$$

ist für $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$ nicht definiert. Die entsprechende Gleichung hat genau eine Lösung:

$$\frac{2}{x-4} = \frac{1}{x+2} \quad\Longrightarrow\quad 2\,x + 4 = x - 4 \quad\Longrightarrow\quad x_3 = -8.$$

Für den Bereich kleiner als -8 wählen wir den Testkandidaten $x = -10$, zwischen -8 und -2 wählen wir $x = -4$, zwischen -2 und 4 wählen wir $x = 0$ und für den Bereich größer als 4 wählen wir $x = 6$. Durch Testen dieser Werte

$$\frac{2}{-10-4} \le \frac{1}{-10+2}, \quad \frac{2}{-4-4} \le \frac{1}{-4+2}, \quad \frac{2}{0-4} \le \frac{1}{0+2}, \quad \frac{2}{6-4} \le \frac{1}{6+2}$$

ergeben sich die beiden Lösungsintervalle $(-\infty, -8]$ und $(-2, 4)$. Dabei ist zu beachten, dass der Wert 8 zur Lösungsmenge gehört, die beiden Werte -2 und 4 jedoch nicht. ▪

1.6 Beweise

Beweise bilden die Substanz der Mathematik. Jede neue Formel, jeder neue Satz wird aus bereits bekannten Aussagen hergeleitet. Diese Herleitungsprozesse nennt man auch Beweise. Dabei wird auch die Aussagenlogik eingesetzt, wie wir sie in *Abschnitt 1.1.1* kennengelernt haben. Die oftmals gefürchtete Strenge der Mathematik ergibt sich wesentlich daraus, dass jede Behauptung zunächst bewiesen werden muss, ehe sie den Status einer Regel oder eines Satzes bekommt. *David Hilbert* war ein Vertreter des strengen Formalismus in der Mathematik. Alle Aussagen sollen widerspruchsfrei bewiesen oder widerlegt werden können. Prinzipiell gibt es verschiedene Varianten der Beweisführung.

3.3.6 Spatprodukt

Eine Formel für das Spatprodukt ergibt sich aus der Formel für das Skalarprodukt aus *Satz 3.13* und der Formel für das Vektorprodukt aus *Satz 3.14*:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2\, c_3 - b_3\, c_2 \\ b_3\, c_1 - b_1\, c_3 \\ b_1\, c_2 - b_2\, c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).\end{aligned}$$

Diese Formel sieht komplizierter aus, als sie in Wirklichkeit ist. Genau wie das Kreuzprodukt, lässt sich auch das Spatprodukt mithilfe von Determinanten darstellen, siehe *Abschnitt 4.3.2*.

Satz 3.15 (Spatprodukt von Vektoren in Koordinaten)

Für das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = a_1(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) + a_2(b_3\, c_1 - b_1\, c_3) + a_3(b_1\, c_2 - b_2\, c_1).$$

Beispiel 3.14 (Spatprodukt)

Das Spatprodukt der drei Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

beträgt

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 1 \cdot ((-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4)) + 4 \cdot (1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-3)) = -6.$$

Der Spat, der von den drei Vektoren aufgespannt wird, hat also das Volumen $V = |-6| = 6$. Da das Spatprodukt negativ ist, bilden die drei Vektoren ein Linkssystem. ■

3.3.7 Lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung

Die Themen lineare Abhängigkeit und Komponentenzerlegung haben wir bereits in *Abschnitt 3.2.6* ausführlich untersucht. In diesem Abschnitt erläutern wir anhand von Beispielen, wie die Untersuchung auf lineare Abhängigkeit und die Komponentenzerlegung für Vektoren in Koordinaten erfolgt.

Beispiel 5.70 (Werte des Arkuskosinus)

a) Es ist $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\,\pi}{3}$, denn $\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) Es ist $\arccos(1) = 0$, denn $\cos(0) = 1$.

c) Der Wert $\arccos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist nicht definiert, da $\frac{\pi}{2}$ nicht im Definitionsbereich des Arkuskosinus liegt. ■

Beispiel 5.69 zeigt, dass man beim Lösen einer trigonometrischen Gleichung mit dem Arkussinus sehr sorgfältig vorgehen muss, damit man nicht einen Teil der Lösungen verliert. Das Lösen trigonometrischer Gleichungen mit dem Arkuskosinus verläuft analog zum Vorgehen beim Arkussinus. Wichtig hierbei ist wiederum die Mehrdeutigkeit des gesuchten Winkels.

Gleichungen lösen mit Arkuskosinus

Der Kosinus ist nur auf der halben Periode umkehrbar. Um alle Lösungen der Gleichung

$$\cos x = y$$

zu bestimmen, berechnet man die erste Lösung direkt mit dem Arkuskosinus, also $x_0 = \arccos y$. Die zweite Lösung ergibt sich durch $x_1 = -\arccos y$. Alle Lösungen ergeben sich wegen der Periode 2π zu

$$x = \arccos y + 2\,k\,\pi, \quad x = -\arccos y + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel 5.71 (Arkuskosinus)

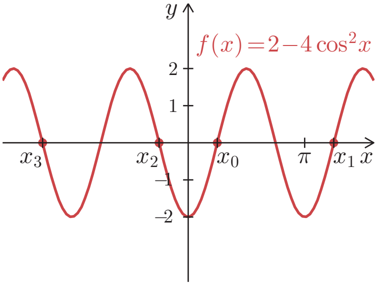
Wir suchen alle Nullstellen der Funktion

$$f(x) = 2 - 4\,\cos^2 x.$$

Diese x-Werte erfüllen die Gleichung $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mit dem Arkuskosinus erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0 &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \\ x_1 &= \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\,\pi}{4}. \end{aligned}$$



Die entsprechenden negativen Werte $x_2 = -\frac{\pi}{4}$ und $x_3 = -\frac{5\,\pi}{4}$ sind auch Nullstellen der Funktion. Alle Lösungen ergeben sich wegen der Periode $2\,\pi$ zu

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k, \quad x = \frac{5\,\pi}{4} + 2\,\pi\,k, \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k, \quad x = -\frac{5\,\pi}{4} + 2\,\pi\,k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$ ■

Im Gegensatz zum Sinus und zum Kosinus ist der Tangens auf der vollen Periode streng monoton wachsend und somit umkehrbar. Dies gilt auch für den Kotangens.

Beispiel 8.13 (Division von Potenzreihen)

Die Funktion $f(x) = \tan x$ ist der Quotient aus Sinus und Kosinus. Für beide Funktionen kennen wir die Potenzreihen mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, siehe *Beispiel 8.9*. Bei der Potenzreihe von f beschränken wir uns auf die Berechnung der Glieder bis zur Ordnung 5:

$$\tan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots$$

Entsprechend müssen wir bei den Potenzreihen des Sinus und Kosinus auch nur Glieder bis zur Ordnung 5 berücksichtigen:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots\right).$$

Ausmultiplizieren der Klammern auf der rechten Seite ergibt

$$c_0 + c_1\,x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24}\right)x^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right)x^5 + \ldots$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und

$$c_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \implies c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \implies c_5 = \frac{2}{15}.$$

Dadurch erhalten wir die Potenzreihe des Tangens

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

Obwohl die Potenzreihen des Sinus und Kosinus den Konvergenzradius $r = \infty$ besitzen, gilt diese Reihenentwicklung nur für $|x| < \frac{\pi}{2}$, denn bei $|x| = \pm\frac{\pi}{2}$ besitzt der Tangens Definitionslücken. ▪

Durch Symmetrieüberlegungen hätten wir uns in *Beispiel 8.13* die Arbeit erleichtern können. Der Sinus ist eine gerade Funktion und der Kosinus ist eine ungerade Funktion. Somit ist der Tangens als Quotient beider Funktion eine ungerade Funktion. Bei der Reihenentwicklung des Tangens hätte man also von vornherein berücksichtigen können, dass die Koeffizienten mit geradem Index, die ja bei Potenzen mit geraden Hochzahlen stehen, alle null sind.

Potenzreihen symmetrischer Funktionen

Die Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ einer

- geraden Funktion besitzt nur gerade Potenzen.
- ungeraden Funktion besitzt nur ungerade Potenzen.

Die Symmetrieüberlegungen lassen sich auf Funktionen, die achsensymmetrisch zur Achse $x = x_0$ oder punktsymmetrisch zum Punkt mit den Koordinaten $(x_0\,|\,y_0)$ sind, verallgemeinern. Diese verallgemeinerte Symmetrie ist in *Definition 5.18* und *Definition 5.20* beschrieben. Dazu betrachtet man Potenzreihen mit der entsprechenden Entwicklungsstelle x_0. In diesen Reihen treten dann die Glieder $(x - x_0)^k$ nur mit geraden oder nur mit ungeraden Hochzahlen auf.

(D) Mehrfache komplexe Eigenwerte

Jedes doppelte konjugiert komplexe Paar Eigenwerte $\lambda = a \pm \mathrm{i}\, b$ einer linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten erzeugt genau vier reelle Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{a\,x} \cos(b\,x), & y_2(x) &= \mathrm{e}^{a\,x} \sin(b\,x), \\ y_3(x) &= x\mathrm{e}^{a\,x} \cos(b\,x), & y_4(x) &= x\mathrm{e}^{a\,x} \sin(b\,x). \end{aligned}$$

Falls die Vielfachheit des komplexen Eigenwerts größer als zwei ist, entstehen jeweils durch Multiplikation mit x neue Fundamentallösungen

$$y_5(x) = x^2\mathrm{e}^{a\,x} \cos(b\,x), \quad y_6(x) = x^2\mathrm{e}^{a\,x} \sin(b\,x), \quad \ldots$$

Beispiel 12.29 (Doppelte komplexe Eigenwerte)

Die Differenzialgleichung

$$y^{(4)} + 4\,y''' + 8\,y'' + 8\,y' + 4\,y = 0$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 4\,\lambda^3 + 8\,\lambda^2 + 8\,\lambda + 4 = 0.$$

Durch Probieren gelangt man auf die Faktorisierung $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$ und damit auf die doppelten Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 + \mathrm{i}$ und $\lambda_{3,4} = 1 - \mathrm{i}$. Somit ist

$$y(x) = \mathrm{e}^x\,(C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x)$$

die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung. ▪

Lösung einer homogenen linearen Differenzialgleichung

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differenzialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten kann man durch folgende Schritte bestimmen:

(1) Berechne alle Eigenwerte aus der charakteristischen Gleichung

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

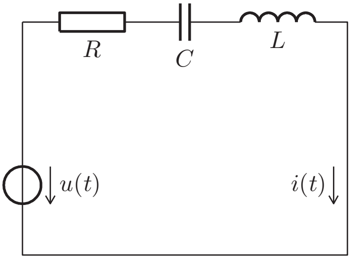
(2) Bestimme zu jedem Eigenwert λ_i die Eigenfunktionen y_i. Dabei sind Spezialfälle bei mehrfachen und komplexen Eigenwerten zu beachten.

(3) Die allgemeine Lösung besteht aus einer Linearkombination der Eigenfunktionen:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Beispiel 12.53 (RLC-Schwingkreis)

Im abgebildeten Schaltkreis befindet sich ein Ohmscher Widerstand R, ein Kondensator mit Kapazität C und eine Spule mit Induktivität L in Reihe. Außerdem ist eine Spannung $u(t)$ angelegt. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe der Spannungen in der Masche null:



$$L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + R\,i + \frac{1}{C}\,q = u(t).$$

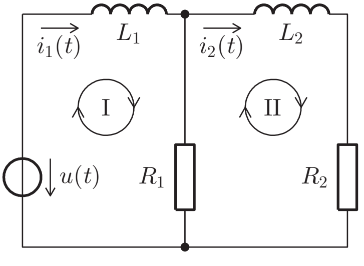
Diese Gleichung enthält neben der Stromstärke und deren erster Ableitung auch noch die Ladung.
Deshalb leiten wir die Gleichung nach t ab und ersetzen die Ableitung der Ladung durch die Stromstärke. Nach Division mit L erhalten wir eine Schwingungsdifferenzialgleichung:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,i = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\,\delta}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{L\,C}}_{\omega_0^2}\,i = \underbrace{\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}_{r(t)}.$$

Es handelt sich also um ein schwingungsfähiges System, bei dem die Frequenz maßgeblich durch das Produkt aus L und C bestimmt wird. In der Elektrotechnik spricht man deshalb von einem $L\,C$-Glied. Unter Vernachlässigung des Ohmschen Widerstands R kann Resonanz auftreten. ■

Beispiel 12.54 (Kettenleiter)

Ein Schaltkreis mit zwei Maschen enthält zwei Ohmsche Widerstände R_1, R_2 und zwei Spulen mit Induktivitäten L_1 und L_2. In der ersten Masche ist eine Spannung $u(t)$ angelegt. In den beiden Maschen fließen die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$. Die Orientierung der Ströme wird in jeder Masche festgelegt, siehe Pfeile in der Abbildung. Dabei ist zu beachten, dass der Widerstand R_1 zu beiden Maschen gehört und nur die Differenz der beiden Maschenströme eine Spannung an diesem Widerstand erzeugt. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz ist die
Summe der Spannungen in jeder Masche null:



$$\begin{array}{lclclcl} L_1\,\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} & + & R_1\,(i_1(t)-i_2(t)) & & & = & u(t) \quad (\mathrm{I}) \\ L_2\,\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} & + & R_1\,(i_2(t)-i_1(t)) & + & R_2\,i_2(t) & = & 0 \quad\;\; (\mathrm{II}) \end{array}$$

Der Kettenleiter lässt sich also durch ein lineares Differenzialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten beschreiben, das wir in Matrixform darstellen können:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{pmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{pmatrix} u(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems lässt sich mit den Methoden aus *Abschnitt 12.5.3* berechnen. ■

Satz 13.6 (Fourier-Reihe einer geraden Funktion)

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion mit Periode T ist eine reine Kosinusreihe:

- Alle Sinuskoeffizienten b_k sind null.
- Die Kosinuskoeffizienten a_k kann man durch folgende Formel berechnen:
$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad \omega = \frac{2\,\pi}{T}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
- Alle Koeffizienten c_k sind rein reell.

Die Rechteckfunktion aus *Beispiel 13.7* ist eine ungerade Funktion. Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Funktionsgleichung erfüllt die Symmetriebedingung $f(-t) = -f(t)$, siehe *Definition 5.19*. Auf alle geraden Funktionen kann man die Vereinfachungen aus *Beispiel 13.7* anwenden.

Satz 13.7 (Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion)

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion mit Periode T ist eine reine Sinusreihe:

- Alle Kosinuskoeffizienten a_k sind null.
- Die Sinuskoeffizienten b_k kann man durch folgende Formel berechnen:
$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad \omega = \frac{2\,\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
- Alle Koeffizienten c_k sind rein imaginär.

13.3.2 Integrationsintervall

Bei den Formeln aus *Satz 13.2* und *Satz 13.4* haben bisher stets das Integrationsintervall von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ verwendet. Aufgrund der Periodizität können wir jedoch über ein beliebiges Intervall integrieren, das sich genau über eine volle Periode erstreckt.

Integrationsintervall

Bei der Berechnung der reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten einer Fourier-Reihe darf man das Integrationsintervall um einen beliebigen Wert t_0 verschieben:

- $a_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t)\,\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t,$
- $b_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t)\,\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t,$
- $c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t.$

Zeitverschiebung

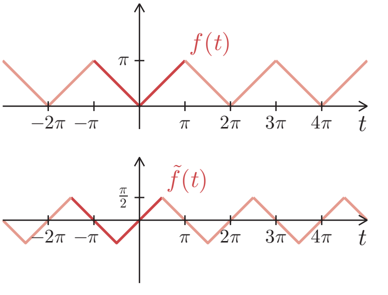
Wenn die Fourier-Reihe der Funktion f mit Periode T die Amplituden A_k und Phasenwinkel φ_k besitzt, dann besitzt die Fourier-Reihe der um t_0 in der Zeit verschobenen Funktion $\tilde{f}(t) = f(t - t_0)$ dieselben Amplituden $\tilde{A}_k = A_k$ und die Phasenwinkel $\tilde{\varphi}_k = -k\,\omega\,t_0 + \varphi_k$.

Verschiebungen um eine halbe oder viertel Periode lassen sich besonders elegant durchführen. In diesen Spezialfällen kann man die Berechnung auch mit den Kosinusanteilen a_k und den Sinusanteilen b_k durchführen, siehe *Beispiel 13.16*.

Beispiel 13.16 (Zeitverschiebung)

Die Dreieckfunktion aus *Beispiel 13.6* hat die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{9}\cos 3\,t + \ldots\right).$$



Das Schaubild der Funktion $\tilde{f}$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion f durch eine Verschiebung in der Zeit und durch eine Verschiebung nach oben:

$$\tilde{f}(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Die Funktion $\tilde{f}$ hat die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= -\frac{4}{\pi}\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{9}\cos 3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{25}\cos 5\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{49}\cos 7\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots\right)\\ &= -\frac{4}{\pi}\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{9}\cos\left(3t + \frac{3\,\pi}{2}\right) + \frac{1}{25}\cos\left(5t + \frac{5\,\pi}{2}\right) + \frac{1}{49}\cos\left(7t + \frac{7\,\pi}{2}\right) + \ldots\right).\end{aligned}$$

Mithilfe der Additionstheoreme in *Satz 5.11* kann man die Verschiebungen der Kosinusfunktionen durch Sinusfunktionen ausdrücken:

$$\tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t - \frac{1}{9}\sin 3\,t + \frac{1}{25}\sin 5\,t - \frac{1}{49}\sin 7\,t \pm \ldots\right).$$

■

Definition 14.4 (Verallgemeinerte Ableitung)

Die **verallgemeinerte Ableitung** der Heaviside-Funktion ist die Dirac-Distribution:

$$\dot\sigma(t) = \delta(t).$$

Durch die Festlegung $\dot\sigma(t) = \delta(t)$ erweitern wir den klassischen Ableitungsbegriff auf Funktionen mit Sprungstellen. Diese Erweiterung bezeichnet man als verallgemeinerte Ableitung. Wir können dadurch Funktionen, die im klassischen Sinne nicht differenzierbar sind, sich aber mithilfe der Einheitssprungfunktion darstellen lassen, eine sinnvolle Ableitungsfunktion zuordnen. Im Sinne der Distributionentheorie besitzt auch die Dirac-Distribution eine Ableitung. Allerdings erfordert eine sinnvolle Definition dieser sogenannten distributiven Ableitung einen tieferen Einstieg in die Materie. Eine ausführliche Darstellung findet man beispielsweise bei [Heuser:FA]. Aus der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{array} \right\} = \sigma(t)$$

erkennen wir, dass es sinnvoll ist, die Heaviside-Funktion als Stammfunktion der Dirac-Distribution zu bezeichnen.

Satz 14.4 (Stammfunktion der Dirac-Distribution)

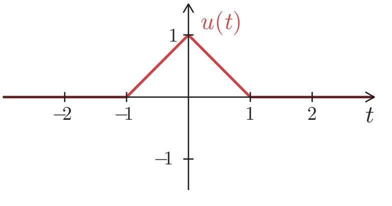
Die Heaviside-Funktion ist eine Stammfunktion der Dirac-Distribution:

$$\int \delta(t)\,\mathrm{d}t = \sigma(t) + C.$$

Beispiel 14.4 (Verallgemeinerte Ableitung)

Gesucht sind die verallgemeinerten Ableitungen $\dot u$ und $\ddot u$ der abgebildeten Funktion u. Zunächst stellen wir u mithilfe der Einheitssprungfunktion dar:

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t)\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big) \\ &+ (1-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big). \end{aligned}$$



Mit der Produktregel für Ableitungen erhält man

$$\dot u(t) = \underbrace{\sigma(t+1) - \sigma(t)}_{r_1(t)} + (1+t)\big(\delta(t+1) - \delta(t)\big) - \underbrace{\big(\sigma(t) + \sigma(t-1)\big)}_{r_2(t)} + (1-t)\big(\delta(t) - \delta(t-1)\big).$$

Die erste Ableitung enthält eine Rechteckfunktion r_1 und eine Rechteckfunktion r_2 mit negativem Vorzeichen. Die einzelnen Dirac-Distributionen fassen wir zusammen:

$$\dot u(t) = \underbrace{\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big)}_{r_1(t)} - \underbrace{\big(\sigma(t) + \sigma(t-1)\big)}_{r_2(t)} + \underbrace{(1+t)\delta(t+1)}_{(1-1)\delta(t+1)} - \underbrace{2\,t\,\delta(t)}_{0\cdot\delta(t)} - \underbrace{(1-t)\delta(t-1)}_{(1-1)\delta(t-1)}.$$