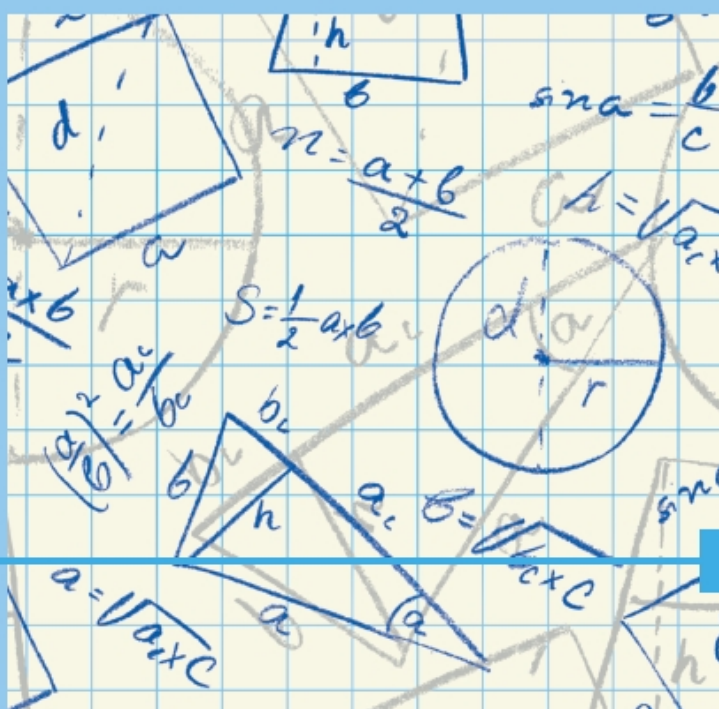


Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Errata

11.03.2016

Mathematik für das Ingenieurstudium



3., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Satz 1.5 (Binomischer Satz)

Für jede natürliche Hochzahl n und beliebige Zahlen a und b gilt die Formel

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beispiel 1.16 (Binomischer Satz)

a) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$



b) $(x + 2)^4 = x^4 + 4 \cdot 2x^3 + 6 \cdot 2^2 x^2 + 4 \cdot 2^3 x + 1.$ ■

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen a und b gelten die binomischen Formeln:

▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

▶ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

▶ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1.4 Trigonometrie

Die Trigonometrie ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Dreiecken beschäftigt. Wir werden in diesem Abschnitt Zusammenhänge zwischen den Längen der Kanten und den Winkeln eines Dreiecks aufzeigen.

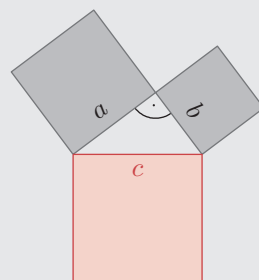
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck besteht ein Zusammenhang zwischen den Längen der einzelnen Dreiecksseiten. Dieser Zusammenhang wurde bereits in der Antike erkannt und ist heute unter dem, nach dem griechischen Mathematiker und Philosophen *Pythagoras* benannten Satz bekannt. Es gibt viele verschiedene Varianten, diesen Satz zu beweisen. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf eine Herleitung.

Satz 1.6 (Satz des Pythagoras)

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Zwischen der Länge der Hypotenuse c und den Längen der beiden Katheten a und b gilt die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Beispiel 10.13 (Division von Potenzreihen)

Die Funktion $f(x) = \tan x$ ist der Quotient aus Sinus und Kosinus. Für beide Funktionen kennen wir die Potenzreihen mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, siehe *Beispiel 10.9*. Bei der Potenzreihe von f beschränken wir uns auf die Berechnung der Glieder bis zur Ordnung 5:

$$\tan x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$$

Entsprechend müssen wir bei den Potenzreihen des Sinus und Kosinus auch nur Glieder bis zur Ordnung 5 berücksichtigen:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right) (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots).$$

Ausmultiplizieren der Klammern auf der rechten Seite ergibt

$$c_0 + c_1x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_0}{24}\right)x^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right)x^5 + \dots$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und

$$c_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \implies c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \implies c_5 = \frac{2}{15}.$$

Dadurch erhalten wir die Potenzreihe des Tangens

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Obwohl die Potenzreihen des Sinus und Kosinus den Konvergenzradius $r = \infty$ besitzen, gilt diese Reihenentwicklung nur für $|x| < \frac{\pi}{2}$, denn bei $|x| = \pm \frac{\pi}{2}$ besitzt der Tangens Definitionslücken. ■

Durch Symmetrieüberlegungen hätten wir uns in *Beispiel 10.13* die Arbeit erleichtern können. Der Sinus ist eine gerade und der Kosinus eine ungerade Funktion. Somit ist der Tangens als Quotient beider Funktion ungerade. Bei der Reihenentwicklung des Tangens hätte man also von vornherein berücksichtigen können, dass die Koeffizienten mit geradem Index, die ja bei Potenzen mit geraden Hochzahlen stehen, alle null sind.

Potenzreihen symmetrischer Funktionen

Die Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ einer

- ▶ geraden Funktion besitzt nur gerade Potenzen.
- ▶ ungeraden Funktion besitzt nur ungerade Potenzen.

Die Symmetrieüberlegungen lassen sich auf Funktionen, die achsensymmetrisch zur Achse $x = x_0$ oder punktsymmetrisch zum Punkt mit den Koordinaten $(x_0 | y_0)$ sind, verallgemeinern. Diese verallgemeinerte Symmetrie ist in *Definition 5.15* und *Definition 5.17* beschrieben. Dazu betrachtet man Potenzreihen mit der entsprechenden Entwicklungsstelle x_0 . In diesen Reihen treten dann die Glieder $(x - x_0)^k$ nur mit geraden oder nur mit ungeraden Hochzahlen auf.

Satz 16.6 (Fourier-Reihe einer geraden Funktion)

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion mit Periode T ist eine reine Kosinusreihe:

- ▶ Alle Sinuskoeffizienten b_k sind null.
- ▶ Die Kosinuskoeffizienten a_k kann man durch folgende Formel berechnen:

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ Alle Koeffizienten c_k sind rein reell.

Die Rechteckfunktion aus *Beispiel 16.7* ist eine ungerade Funktion. Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Funktionsgleichung erfüllt die Symmetriebedingung $f(-t) = -f(t)$, siehe *Definition 5.16*. Auf alle geraden Funktionen kann man die Vereinfachungen aus *Beispiel 16.7* anwenden.

Satz 16.7 (Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion)

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion mit Periode T ist eine reine Sinusreihe:

- ▶ Alle Kosinuskoeffizienten a_k sind null.
- ▶ Die Sinuskoeffizienten b_k kann man durch folgende Formel berechnen:

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots$$


- ▶ Alle Koeffizienten c_k sind rein imaginär.

16.3.2 Integrationsintervall

Bei den Formeln aus *Satz 16.2* und *Satz 16.4* haben bisher stets das Integrationsintervall von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ verwendet. Aufgrund der Periodizität können wir jedoch über ein beliebiges Intervall integrieren, das sich genau über eine volle Periode erstreckt.

Integrationsintervall

Bei der Berechnung der reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten einer Fourier-Reihe darf man das Integrationsintervall um einen beliebigen Wert t_0 verschieben:

- ▶ $a_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t) \cos(k\omega t) dt,$ 
- ▶ $b_k = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t) \sin(k\omega t) dt,$
- ▶ $c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} f(t) e^{-ik\omega t} dt.$

Zeitverschiebung

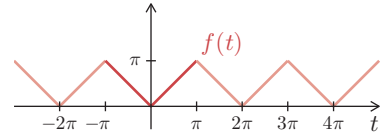
Wenn die Fourier-Reihe der Funktion f mit Periode T die Amplituden A_k und Phasenwinkel φ_k besitzt, dann besitzt die Fourier-Reihe der um t_0 in der Zeit verschobenen Funktion $\tilde{f}(t) = f(t - t_0)$ dieselben Amplituden $\tilde{A}_k = A_k$ und die Phasenwinkel $\tilde{\varphi}_k = -k\omega t_0 + \varphi_k$.

Verschiebungen um eine halbe oder viertel Periode lassen sich besonders elegant durchführen. In diesen Spezialfällen kann man die Berechnung auch mit den Kosinusanteilen a_k und den Sinusanteilen b_k durchführen, siehe *Beispiel 16.16*.

Beispiel 16.16 (Zeitverschiebung)

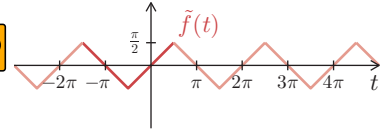
Die Dreieckfunktion aus *Beispiel 16.6* hat die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \dots \right).$$



Das Schaubild der Funktion \tilde{f} entsteht aus dem Schaubild der Funktion f durch eine Verschiebung in der Zeit und durch eine Verschiebung nach oben:

$$\tilde{f}(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$



Die Funktion \tilde{f} hat die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= -\frac{4}{\pi} \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos 3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \cos 5\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{49} \cos 7\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right) \\ &= -\frac{4}{\pi} \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \cos\left(5t + \frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{49} \cos\left(7t + \frac{7\pi}{2}\right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Mithilfe der Additionstheoreme in *Satz 6.9* kann man die Verschiebungen der Kosinusfunktionen durch Sinusfunktionen ausdrücken:

$$\tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t - \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t - \frac{1}{49} \sin 7t \pm \dots \right). \quad \blacksquare$$

Definition 17.4 (Verallgemeinerte Ableitung)

Die verallgemeinerte Ableitung der Heaviside-Funktion ist die Dirac-Distribution:

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t).$$

Durch die Festlegung $\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$ erweitern wir den klassischen Ableitungsbegriff auf Funktionen mit Sprungstellen. Diese Erweiterung bezeichnet man als verallgemeinerte Ableitung. Wir können dadurch Funktionen, die im klassischen Sinne nicht differenzierbar sind, sich aber mithilfe der Einheitssprungfunktion darstellen lassen, eine sinnvolle Ableitungsfunktion zuordnen. Im Sinne der Distributionentheorie besitzt auch die Dirac-Distribution eine Ableitung. Allerdings erfordert eine sinnvolle Definition dieser sogenannten distributiven Ableitung einen tieferen Einstieg in die Materie. Eine ausführliche Darstellung findet man beispielsweise bei [Heuser:FA]. Aus der Beziehung

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} = \sigma(t)$$

erkennen wir, dass es sinnvoll ist, die Heaviside-Funktion als Stammfunktion der Dirac-Distribution zu bezeichnen.

Satz 17.4 (Stammfunktion der Dirac-Distribution)

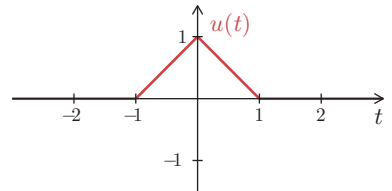
Die Heaviside-Funktion ist eine Stammfunktion der Dirac-Distribution:

$$\int \delta(t) dt = \sigma(t) + C.$$

Beispiel 17.4 (Verallgemeinerte Ableitung)

Gesucht sind die verallgemeinerten Ableitungen \dot{u} und \ddot{u} der abgebildeten Funktion u . Zunächst stellen wir u mithilfe der Einheitssprungfunktion dar:

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) \\ &+ (1-t)(\sigma(t) - \sigma(t-1)). \end{aligned}$$



Mit der Produktregel für Ableitungen erhält man

$$\dot{u}(t) = \underbrace{\sigma(t+1) - \sigma(t)}_{r_1(t)} + (1+t)(\delta(t+1) - \delta(t)) - \underbrace{(\sigma(t) + \sigma(t-1))}_{r_2(t)} + (1-t)(\delta(t) - \delta(t-1)).$$

Die erste Ableitung enthält eine Rechteckfunktion r_1 und eine Rechteckfunktion r_2 mit negativem Vorzeichen. Die einzelnen Dirac-Distributionen fassen wir zusammen:

$$\dot{u}(t) = \underbrace{(\sigma(t+1) - \sigma(t))}_{r_1(t)} - \underbrace{(\sigma(t) + \sigma(t-1))}_{r_2(t)} + \underbrace{(1+t)\delta(t+1)}_{(1-1)\delta(t+1)} - \underbrace{2t\delta(t)}_{0 \cdot \delta(t)} - \underbrace{(1-t)\delta(t-1)}_{(1-1)\delta(t-1)}.$$

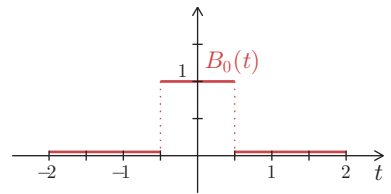
17.5 Anwendungen

Bei vielen technischen Anwendungen, insbesondere in der Regelungstechnik und Signalverarbeitung, kommen Funktionen mit Sprungstellen vor. Diesen Aspekt werden wir bei der Fourier-Transformation in *Kapitel 18* und bei der Laplace-Transformation in *Kapitel 19* nochmals aufgreifen. In diesem Abschnitt betrachten wir einen weiteren Anwendungsbereich für verallgemeinerte Funktionen: CAD-Systeme.

B-Splines

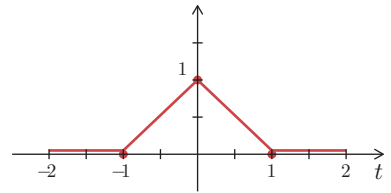
Die mathematische Darstellung von Kurven und Flächen beruht in CAD-Systemen auf sogenannten NURBS, also auf Non-Uniform-Rational-B-Spline-Surfaces. Bézier-Kurven, die einen Spezialfall der B-Splines bilden, haben wir bereits in *Abschnitt 11.6* betrachtet. *Isaac Jacob Schoenberg* und *Carl de Boor* haben den Begriff B-Spline geprägt. Das „B“ steht dabei für Basis. Diese Basisfunktionen kann man durch Faltungen definieren.

Die Basisfunktion vom Grad 0 ist ein Rechteck der Höhe 1, das sich auf der t -Achse im Bereich von $t = -\frac{1}{2}$ bis $t = \frac{1}{2}$ erstreckt. Dieser B-Spline wird mit B_0 bezeichnet. Aus diesem B-Spline werden durch Faltung alle B-Splines höherer Ordnung erzeugt. Der B-Spline B_1 ist definiert durch $B_1(t) = B_0(t) \star B_0(t)$.



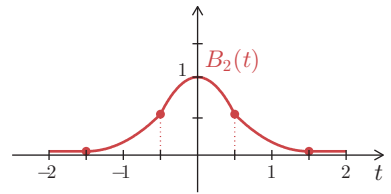
Die Faltung des Rechtecks mit sich selbst verläuft analog zu *Beispiel 17.5* und ergibt

$$B_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -1, \\ 1+t & \text{für } -1 \leq t < 0, \\ 1-t & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{für } t \geq 1. \end{cases}$$



Durch die Faltung $B_2(t) = B_1(t) \star B_0(t)$ erhöht sich der Grad wieder um eins. Für t -Werte zwischen $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$B_2(t) = \int_{-1}^{t+\frac{1}{2}} (\tau + 1) d\tau = \frac{1}{8}(2t + 3)^2.$$



Aufgrund der Symmetrie ergibt sich

$$B_2(t) = \frac{1}{8}(3 - 2t)^2 \text{ für } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \quad B_2(t) = 1 - 2t^2 \text{ für } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$



Für t -Werte zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ hat die Parabel den Scheitel in $S(0 | 1)$ und verläuft durch die beiden Punkte mit den Koordinaten $(-\frac{1}{2} | \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2} | \frac{1}{2})$. Die Nahtstellen der einzelnen Funktionsabschnitte $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ bezeichnet man als Knoten des B-Splines.