Mathematik
für das Ingenieurstudium

4. Auflage

Lösungen der Aufgaben

Jürgen Koch Martin Stämpfle

28. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen 5

2 Lineare Gleichungssysteme 15

3 Vektoren 23

4 Matrizen 37

5 Funktionen 51

6 Elementare Funktionen 61

7 Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit 75

8 Differenzialrechnung 85

9 Integralrechnung 107

10 Potenzreihen 127

11 Kurven 139

12 Funktionen mit mehreren Variablen 151

13 Komplexe Zahlen und Funktionen 159

14 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 171

15 Differenzengleichungen 203

16 Fourier-Reihen 207

17 Verallgemeinerte Funktionen 217

18 Fourier-Transformation 221

19 Laplace-Transformation 229

20 z-Transformation 241

21 Elementare Zahlentheorie 249

1 Grundlagen

Lösung 1.1

a) Alle angegebenen Zahlen sind reelle Zahlen: 0, -2, 0.815, $\sqrt{2}$, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$

b) Alle angegebenen Zahlen, außer $\sqrt{2}$, sind rationale Zahlen: 0, -2, 0.815, $\frac{51}{17}$, $-\frac{47}{11}$

c) Da sich der Bruch $\frac{51}{17} = 3$ kürzen lässt, stellt er auch eine ganze Zahl dar: 0, -2, $\frac{51}{17} = 3$

d) Unter den angegebenen Zahlen ist $\frac{51}{17} = 3$ die einzige natürliche Zahl.

Lösung 1.2

$$\frac{1}{9} = 0.11111111\ldots$$
$$\frac{7}{9} = 7 \cdot \frac{1}{9} = 7 \cdot 0.11111111\ldots = 0.77777777\ldots$$
$$\frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} = 3 \cdot 0.11111111\ldots = 0.33333333\ldots$$
$$\frac{1}{99} = 0.01010101\ldots$$
$$\frac{5}{11} = \frac{45}{99} = 45 \cdot \frac{1}{99} = 45 \cdot 0.01010101\ldots = 0.45454545\ldots$$
$$\frac{4711}{9999} = 4711 \cdot \frac{1}{99999} = 4711 \cdot 0.00010001\ldots = 0.47114711\ldots$$

Lösung 1.3

Der Trick besteht darin, alle Brüche auf denselben Nenner 210 zu erweitern

$$\frac{34}{105} = \frac{68}{210} < \frac{23}{70} = \frac{69}{210} < \frac{1}{3} = \frac{70}{210} < \frac{12}{35} = \frac{72}{210} < \frac{5}{14} = \frac{75}{210} < \frac{11}{30} = \frac{77}{210}.$$

Lösung 1.4

Wir formulieren einzelne Beschreibungsteile der Lösungsmenge mit Intervallen und verknüpfen diese anschließend. Einzelne, disjunkte Intervalle können vereinigt werden, oder aber man schließt Teilintervalle von einer Gesamtmenge wieder aus.

a) $L = (-\infty, 7) \cup (7, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$
b) $L = (-\infty, -3) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-3, 2]$
c) $L = (-\infty, 6] \cup (8, \infty) = \mathbb{R} \setminus (6, 8]$
d) $L = [-3, 3] \cup [4, \infty) = [-3, \infty) \setminus (3, 4)$

Lösung 1.5

Wir beachten die Reihenfolge der Operationen: Klammern binden am stärksten, danach kommen Potenzen, danach Produkte und schließlich Summen.

a) -6
b) 6
c) 6
d) 18
e) 3
f) 9
g) -9
h) 17
i) 21

Lösung 1.6

Der Wurzelausdruck ist definiert, falls $a^2 - b^2$ nicht negativ ist und er wird niemals negativ.

a) falsch !
b) falsch !
c) falsch !
d) falsch !
e) falsch !
f) richtig !

Lösung 1.7

Die Wurzelgleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, deshalb gilt:

a) falsch !
b) falsch !
c) richtig !
d) falsch !
e) falsch !
f) richtig !

Lösung 1.8

Die Gerade geht durch die Punkte $P_1(-3\,|\,9)$ und $P_2(1\,|\,1)$. Die Steigung ergibt sich aus dem Verhältnis der Differenzen der x-Werte und der y-Werte:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-9}{1-(-3)} = -2.$$

Lösung 1.9

Zur Veranschaulichung können wir die gegebenen Mengen auf der Zahlengeraden skizzieren. Wir bilden dann die angegebene Vereinigung bzw. den angegebenen Durchschnitt.

a) $M = (-2, \infty) \setminus \{2\}$
b) $M = [-1, 1]$
c) $M = \mathbb{R} \setminus \left(1, \sqrt{2}\right)$

Lösung 1.10

Wir suchen nach gleichen Teilen in der einzelnen Summanden. Bei Zahlen wird nach dem größten gemeinsamen Teiler gesucht. Bei Variablen wird nach Variablenkombinationen gesucht, die in allen Termen vorkommen.

a) $8\,x - 4\,z$
b) $6\,x + 12\,y - 3\,z$
c) $5\,x\,y\,(2\,x + y)$
d) $3\,x\,y^2\,(2\,x\,y - 1)\,(2\,x\,y + 1)$
e) $3\,x\,y\,z\left(3\,x^2\,z - 4\,x\,y^2 + y\,z^2\right)$
f) $6\,x^2\,z^2\left(x^3\,z^2 - 2\,y^2\,z + 12\,y^2\right)$

Lösung 1.11

Wir wenden einmal oder mehrfach die binomischen Formeln an. Außerdem verwenden wir zum Zusammenfassen der Hochzahlen die Potenzgesetze.

a) $x^2 - 2\,x\,y^3 + y^6$
b) $x^4 + 4\,x^2\,y + 4\,y^2$
c) $4\,x\,y$
d) $32\,x\,y$
e) $3\,y^2 - 6\,x^2\,y$
f) $x^6 + x^4 - 2\,x^3\,y^2 - 4\,x^2\,y^3 + 4\,y^6 + y^4$

Lösung 1.12

Bei dieser Aufgabe werden die Binome rückwärts von rechts nach links angewandt.

a) Wenden Sie das erste Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$(x+1)^2$

b) Wenden Sie das erste Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$(3y+1)^2$

c) Wenden Sie das zweite Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$4(x-1)^2$

d) Wenden Sie das zweite Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$(3x-4y)^2$

e) Wenden Sie das dritte Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$4\,(2x-y)\,(2x+y)$

f) Klammern Sie zunächst aus der zweiten Klammer x aus. Wenden Sie dann zweimal das dritte Binom rückwärts an. Machen Sie nach dem Erstellen des Klammerausdrucks die Probe durch Ausmultiplizieren.
$x\,(3x-2)\,(3x+2)\,(x-1)\,(x+1)$

Lösung 1.13

Wir berechnen zunächst die einzelnen Potenzen und fassen diese danach zusammen.

a) 16 b) 2000 c) 81

Lösung 1.14

Wir berechnen zunächst die Potenzen in der Klammer und berücksichtigen Sie danach den zweiten Exponenten. Alternativ können wir den Ausdruck mit den Potenzgesetzen vereinfachen und danach den Zahlenwert berechnen.

a) 64 b) -64 c) 64
d) $\frac{1}{64}$ e) $-\frac{1}{64}$ f) $\frac{1}{64}$

Lösung 1.15

Der Kehrwert einer Potenz wird gebildet, in dem man das Vorzeichen des Exponenten ändert.

a) x^3 b) x^7 c) $\frac{1}{x^7}$
d) $a+b$ e) $\frac{1}{(a+b)^2}$ f) $\frac{1}{(a+b)^3}$
g) x^4 h) x^n i) x^{3-2n}

Lösung 1.16

Am besten, wir suchen nach gemeinsamen Teilausdrücken. Wir können diese anschließend ausklammern und gegebenenfalls kürzen.

a) 1 b) x^2 c) $\frac{a^2c^5}{b^5d}$

Lösung 1.17

Wir fassen die Audrücke zunächst zusammen und ziehen anschließend die Wurzel ganz oder teilweise.

a) 7 b) 5 c) 9

Lösung 1.18

Wir suchen nach quadratischen Teilausdrücken unter der Wurzel. Diese können geeignet vor die Wurzel gezogen werden.

a) $2|x|\sqrt{y}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{6}$ c) $\sqrt{xy}\,|2x-1|$

Lösung 1.19

Wir wenden den Satz des Pythagoras an.

a) $c = 5$ b) $c = 13$ c) $c = 10$

Lösung 1.20

Wir benutzen die Umrechnungsformel vom Gradmaß in das Bogenmaß.

a) $x = \dfrac{\pi}{6}$ b) $x = -\dfrac{5\,\pi}{6}$ c) $x = \dfrac{3\,\pi}{2}$

Lösung 1.21

Wir können in einer Tabelle mit speziellen trigonometrischen Werten nachsehen. Diese Werte werden sehr häufig gebraucht. Am besten, man kennt sie auswendig!

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ c) $\sin\left(\dfrac{5\,\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ g) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Lösung 1.22

Wir könne in einer Tabelle mit speziellen trigonometrischen Werten nachschlagen. Diese Winkel werden sehr häufig gebraucht. Am besten, man kennt sie auswendig!

a) $\alpha = 60\,^\circ$ b) $\alpha = 30\,^\circ$ c) $\alpha = 45\,^\circ$ d) $\alpha = 60\,^\circ$

e) $\alpha = 60\,^\circ$ f) $\alpha = 30\,^\circ$ g) $\alpha = 45\,^\circ$ h) $\alpha = 30\,^\circ$

Lösung 1.23

Wir verwenden die Mitternachtsformel zur Lösung der Gleichungen und achten dabei darauf, dass die Terme in der Gleichung richtig angeordnet sind. Abhängig von der Diskriminante gibt es keine, eine oder zwei Lösungen.

a) $x_1 = 1, x_2 = -2$ b) $x_1 = 3$ c) keine Lösung

Lösung 1.24

Wir führen die Substitution $u = x^2$ durch. Danach lösen wir dann die resultierenden quadratischen Gleichungen mit der Variablen u. Schließlich bestimmen wir alle Lösungen x aus der Gleichung $x^2 = u$.

a) $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3,\ x_4 = -3$

b) $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Lösung 1.25

Wir isolieren zunächst eine Wurzel und quadrieren dann die Gleichung. Falls die Gleichung immer noch eine Wurzel enthält, wiederholen wir den Vorgang. Wir lösen dann die entstehende wurzelfreie Gleichung und machen anschließend die Probe.

a) $L = \left\{2 - \sqrt{6}\right\}$ b) $L = \{2\}$ c) $L = \{-1, 0\}$

Lösung 1.26

Fassen Sie die Zahlen zusammen und benutzen Sie die Definition des Betrags.

a) 4 b) 4 c) 10
d) 5 e) 4 f) 15

Lösung 1.27

Entscheidend für die betragsfreie Darstellung sind die Lösungen der Gleichung

$$-3x^2 + 3x + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-6} = -1, 2.$$

Damit gilt:

$$\left|-3x^2 + 3x + 6\right| = \begin{cases} -3x^2 + 3x + 6 & \text{für } -1 \le x \le 2 \\ 3x^2 - 3x - 6 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 1.28

a) Alle Lösungen erhält man aus den beiden Fällen

$$2 - 5x \ge 0 \iff x \le \frac{2}{5}: \quad 2 - 5x = 3 \quad \Longrightarrow \quad -1 = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}$$

und

$$2 - 5x < 0 \iff x > \frac{2}{5}: \quad 2 - 5x = -3 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$.

b) Durch Fallunterscheidung ergibt sich

$$2 + x \ge 0 \iff x \ge -2: \quad 2 + x = 4x - 1 \quad \Longrightarrow \quad 3 = 3x \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

und

$$2 + x < 0 \iff x < -2: \quad 2 + x = -4x + 1 \quad \Longrightarrow \quad 5x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{5}.$$

Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\{1\}$.

c) Auflösen des Betrags ergibt

$$x^2 - 4 \geq 0 \iff |x| \geq 2: \quad x^2 - 4 = 5 \implies x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

und

$$x^2 - 4 < 0 \iff |x| < 2: \quad x^2 - 4 = -5 \implies x^2 = -1.$$

Die letzte Gleichung hat keine reellen Lösungen. Unter Berücksichtigung der Fallbedingungen lautet die Lösungsmenge $\{\pm 3\}$.

Lösung 1.29

Wir bringen alle Terme mit x auf die linke Seite und alle anderen Terme auf die rechte Seite. Anschließend fassen wir die Terme zusammen.

a) $L = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ b) $L = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ c) $L = \left(\frac{13}{11}, \infty\right)$

Lösung 1.30

Wir betrachten zunächst anstelle der Ungleichung die entsprechende Gleichung und lösen diese. Dann entscheiden wir, welche Intervalle zur Lösungsmenge der Ungleichung gehören.

a) $L = (-2, 2)$ b) $L = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ c) $L = (-\infty, -7) \cup (1, \infty)$

d) $L = (-4, 5)$ e) $L = \{-4\}$ f) $L = \left(\frac{3}{5}, \frac{7}{2}\right)$

Lösung 1.31

Jeder Betrag kann durch eine Fallunterscheidung aufgelöst werden. Da bei hier zwei Beträge auftreten, müssen zwei Fallunterscheidungen durchgeführt werden. Dies führt zu insgesamt vier Fällen. Man beginnt mit der Fallunterscheidung für den inneren Betrag, also mit $x \geq 0$ und $x < 0$. Die Lösungsmenge ist schließlich $L = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Lösung 1.32

a)

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

b)

$$\sum_{k=-1}^{3} 2^{k-1} = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = \frac{31}{4}.$$

c)

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^3}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

d)

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{(k+1)}{k^2} = \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} = 2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} = \frac{115}{36}.$$

Lösung 1.33

Folgende Formel ist zu beweisen:

$$2+4+6+8+10+12+\ldots+2n = n(n+1).$$

Ein direkter Beweis ergibt sich aus der Summenformel von Gauß

$$2(1+2+3+4+5+6+\ldots+n) = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Die Behauptung lässt sich auch durch vollständige Induktion beweisen. Für $n = 0$ ist der Induktionsanfang erfüllt:

$$2\cdot 0 = 0(0+1).$$

Beim Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass die Behauptung für n gilt und betrachten die Behauptung für $n+1$:

$$\underbrace{2+4+6+8+10+12+\ldots+2n}_{\text{Behauptung für } n} + 2(n+1) = \underbrace{n(n+1)}_{\text{Behauptung für } n} + 2(n+1) = (n+2)(n+1).$$

Lösung 1.34

Die Behauptung lautet, dass $n^3 - n$ für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar ist.
Wenn wir geschickt umformen

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1),$$

dann sieht man, dass man die Behauptung direkt beweisen kann. Denn $(n-1)n(n+1)$ ist ein Produkt von drei direkt aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Mindesten eine diese drei Zahlen ist ein Vielfaches von 3. Somit ist auch das Produkt durch 3 teilbar.
Die Behauptung lässt sich auch durch vollständige Induktion beweisen. Für $n = 0$ ist der Induktionsanfang erfüllt:

$$0^3 - 0 = 0,$$

denn 0 ist auch ein Vielfaches von 3.
Beim Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass die Behauptung für n gilt und betrachten die Behauptung für $n+1$:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = \underbrace{n^3 - n}_{\text{Vielfaches von } 3} + \underbrace{3(n^2+n)}_{\text{Vielfaches von } 3}.$$

Lösung 1.35

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{\text{ges}} = \frac{2\cdot 3}{2+3}\,\Omega = \frac{6}{5}\,\Omega\,.$$

Lösung 1.36

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0}$$

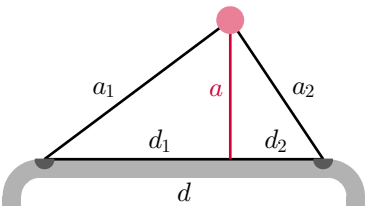
Lösung 1.37

Wenn der hintere Fahrer mit Nein antwortet, muss eines der beiden vorderen Fahrzeuge eine schwarze Heckklappe haben. Ansonsten wären die beiden vorderen Heckklappen silber und der hintere Fahrer könnte mit Ja antworten. Wenn der mittlere Fahrer mit Nein antwortet, muss das vordere Fahrzeug eine schwarze Heckklappe haben. Ansonsten wäre die vordere Heckklappe silber und der mittlere Fahrer könnte mit Ja antworten. Die Antwort lautet also: „schwarz".

Lösung 1.38

Wir teilen den Abstand $d = d_1 + d_2$ der beiden Sensoren, wie in der Abbildung dargestellt, in zwei Abschnitte d_1 und d_2 auf. Mittels des Satzes von Pythagoras erhält man

$$a^2 + d_1^2 = a_1^2 \quad , \quad a^2 + d_2^2 = a_2^2 \quad .$$



Durch Auflösen beider Gleichungen nach a^2 und Gleichsetzen ergibt sich:

$$a_1^2 - d_1^2 = a_2^2 - d_2^2 \quad .$$

Mit $d_2 = d - d_1$ folgt dann

$$a_1^2 - d_1^2 = a_2^2 - d^2 + 2dd_1 - d_1^2 \quad .$$

Somit ist

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + d^2}{2d}$$

und daraus folgen wegen $a = \sqrt{a_1^2 - d_1^2}$ und aus Symmetriegründen die beiden Darstellungen des Abstands

$$a = \sqrt{a_1^2 - \frac{(a_1^2 - a_2^2 + d^2)^2}{4d^2}} = \sqrt{a_2^2 - \frac{(a_2^2 - a_1^2 + d^2)^2}{4d^2}} \quad .$$

Lösung 1.39

Das Reduzierstück hat die Form eines Kegelstumpfes.

a) Es gilt

$$r_1 = r_2 + a \quad , \quad a^2 = h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 \quad , \quad a = 5\sqrt{5} \approx 11.18 \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Radius ist gegeben durch

$$\pi d_1 = \varphi r_1 \quad , \quad \pi d_2 = \varphi r_2 \quad .$$

Daraus folgt

$$r_2 = \frac{d_2}{d_1}\, r_1 \quad .$$

Durch Einsetzen erhält man

$$r_1 = \frac{a d_1}{d_1 - d_2} = 15\sqrt{5} \approx 33.54 \quad , \quad r_2 = \frac{a d_2}{d_1 - d_2} = 10\sqrt{5} \approx 22.36 \quad .$$

Für den Winkel des Kreisringsegments gilt

$$\varphi = \frac{\pi d_1}{r_1} = \frac{\pi(d_1 - d_2)}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.81 \approx 161^\circ \quad .$$

b) Für den Steigungswinkel α gilt

$$\alpha = \arctan \frac{2h}{d_1 - d_2} = \arctan 2 \approx 1.11 \approx 63^\circ \quad .$$

c) Soll speziell $\varphi_0 = \pi$ gelten, so folgt wegen $d_1 - d_2 = a$

$$\alpha_0 = \arccos \frac{d_1 - d_2}{2a} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad .$$

d) Für die Oberfläche gilt

$$A = \frac{\varphi(r_1^2 - r_2^2)}{2} = 125\sqrt{5}\pi \approx 878 \quad .$$

2 Lineare Gleichungssysteme

Lösung 2.1

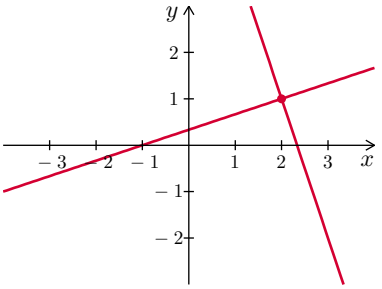
Mit dem Rechenschema ergibt sich

$$\begin{array}{cc|cl} 1 & -3 & -1 & |(-3) \\ 3 & 1 & 7 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 10 \end{array}$$

und daraus die Lösung $x = 2$, $y = 1$. Für die grafische Lösung löst man die Gleichungen nach y auf

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \\ y &= 7 - 3x \end{aligned}$$

und bestimmt den Schnittpunkt der beiden Geraden.



Lösung 2.2

a) Mit dem Rechenschema ergibt sich

$$\begin{array}{cc|cl} 2 & -3 & 6 & \\ 3 & 1 & 3 & |(2) \\ 4 & 4 & 3 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|cl} 2 & -3 & 6 & |(-3)(-2) \\ 6 & 2 & 6 & \\ 4 & 4 & 3 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|cl} 2 & -3 & 6 & \\ 0 & 11 & -12 & \\ 0 & 10 & -9 & |(11) \end{array}$$

und weiter

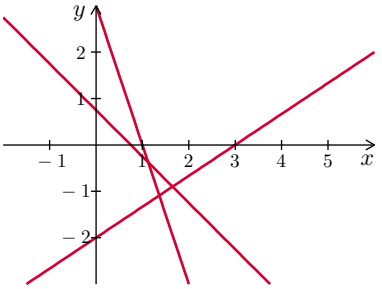
$$\begin{array}{cc|cl} 2 & -3 & 6 & \\ 0 & 11 & -12 & |(-10) \\ 0 & 110 & -99 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 21 \end{array}$$

und daraus, daß das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Für die grafische Bestimmung der Lösungsmenge lösen wir die Gleichungen nach y auf:

$$\begin{aligned} y &= -2 + \frac{2}{3}x \\ y &= 3 - 3x \\ y &= \frac{3}{4} - x \end{aligned}$$

Die drei Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.



b) Mit der Schreibweise als Rechenschema liefert der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{cc|cl} 2 & -3 & 9 & \\ 1 & 2 & 4 & \\ 1 & -5 & 5 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|cl} 1 & 2 & 4 & |(-2)(-1) \\ 2 & -3 & 9 & \\ 1 & -5 & 5 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cc|cl} 1 & 2 & 4 & \\ 0 & -7 & 1 & |(-1) \\ 0 & -7 & 1 & \end{array}$$

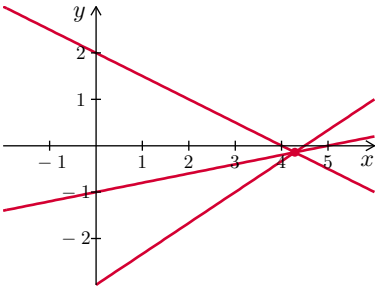
und weiter

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die dritte Gleichung ist redundant und wir erhalten die Lösung $x = \frac{30}{7}$, $y = -\frac{1}{7}$.

Für die grafische Berechnung der Lösung lösen wir die Gleichungen nach y auf:

$$\begin{aligned} y &= -3 + \frac{2}{3}x \\ y &= 2 - \frac{1}{2}x \\ y &= -1 + \frac{1}{5}x \end{aligned}$$



Die drei Geraden haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Lösung 2.3

Mit dem Gauß-Algorithmus ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cc|cl} 9 & -6 & b & |(2) \\ -6 & 4 & 2 & \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{cc|cl} -6 & 4 & 2 & |(3) \\ 18 & -12 & 2b & \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2b+6 \end{array}\right)$$

Für $b = -3$ gibt es unendlich viele Lösungen $y = t$ und $x = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$.

Lösung 2.4

a) Durch Anwenden des Gauß-Algorithmus erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|cl} 1 & -1 & 1 & 2 & |(-1)(-1) \\ 1 & -1 & 3 & 3 & \\ 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|cl} 1 & -1 & 1 & 2 & |(-1)(-1) \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 2 & -3 & -2 & \end{array}\right)$$

und damit

$$\left(\begin{array}{ccc|cl} 1 & -1 & 1 & 2 & |(-1)(-1) \\ 0 & 2 & -3 & -2 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \end{array}\right)$$

Daraus läßt sich durch Rückwärtseinsetzen die eindeutige Lösung $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ bestimmen.

b) Das Eliminationsverfahren von Gauß führt auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) , \quad \left(\begin{array}{ccc|cl} 1 & -3 & 2 & 1 & |(-3)(-2) \\ 3 & -4 & 5 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & \end{array}\right)$$

und weiter auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -3 & -1 \end{array}\right)\ |(5) \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|cl} 1 & -3 & 2 & 1 & \\ 0 & 5 & -1 & -2 & |(-8) \\ 0 & 40 & -15 & -5 & \end{array}\right)$$

und schließlich auf

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 11 \end{array}\right| \quad |(-8)$$

Durch Rückwärtseinsetzen folgt die eindeutige Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{7}$, $x_3 = -\frac{11}{7}$.

Lösung 2.5

a) Für $p = 0$ lautet das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

und ist damit eindeutig lösbar. Für $p \neq 0$ liefert die Vorwärtselimination

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & p & -1 & 3 \\ 2p & -2 & 4 & 0 \\ 0 & p & 1 & 1 \end{array}\right| \quad |(-p) \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & p & -1 & 3 \\ 0 & -p^2-2 & p+4 & -3p \\ 0 & p & 1 & 1 \end{array}\right|$$

und weiter

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & p & -1 & 3 \\ 0 & p & 1 & 1 \\ 0 & -p^2-2 & p+4 & -3p \end{array}\right| \quad |(\tfrac{p^2+2}{p}) \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & p & -1 & 3 \\ 0 & p & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2p^2+4p+2 & -2p^2+2 \end{array}\right|$$

Der Ausdruck $2p^2 + 4p + 2$ wird null, falls $p = -1$, und der Ausdruck $-2p^2 + 2$ wird null, falls $p = \pm 1$. Somit gibt es unendlich viele Lösungen, falls $p = -1$ und genau eine Lösung, falls $p = 1$. Zusammen mit dem Fall $p = 0$ lautet das Endergebnis: Es gibt eine eindeutige Lösung für $p \neq -1$ und unendlich viele Lösungen für $p = -1$.

b) Für den Spezialfall $p = 0$ lautet das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

und ist damit eindeutig lösbar. Für $p \neq 0$ liefert die Vorwärtselimination

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ p & 1 & 1 & p^2 \end{array}\right| \quad |(-1)(-p) \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-1 \\ 0 & 1-p & 1-p^2 & p^2-p \end{array}\right| \quad |(1)$$

und weiter

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & -p^2-p+2 & p^2-1 \end{array}\right|$$

Der Ausdruck $-p^2 - p + 2$ wird null, falls $p = -2$ oder $p = 1$, und der Ausdruck $p^2 - 1$ wird null, falls $p = \pm 1$. Somit gibt es eine eindeutige Lösung, falls $p = -1$, und unendlich viele Lösungen, falls $p = 1$. Im Fall $p = -2$ gibt es keine Lösung. Zusammen mit dem Spezialfall $p = 0$ ergibt sich folgende Endsituation: Es gibt eine eindeutige Lösung für $p \neq -2$ und $p \neq 1$ und unendlich viele Lösungen für $p = 1$. Für $p = -2$ ist das Gleichungssystem unlösbar.

Lösung 2.6

Zunächst schreibt man mittels des Rechenschemas

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & p \\ -1 & 2 & -2 & q \\ 1 & 4 & 0 & r \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & r \\ 2 & -1 & 3 & p \\ -1 & 2 & -2 & q \end{array}\right. \quad |(-2)(1)$$

und weiter

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & r \\ 0 & -9 & 3 & p-2r \\ 0 & 6 & -2 & r+q \end{array}\right. \quad |(2) \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & r \\ 0 & 6 & -2 & r+q \\ 0 & -18 & 6 & 2p-4r \end{array}\right. \quad |(3)$$

und schließlich

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & r \\ 0 & 6 & -2 & r+q \\ 0 & 0 & 0 & 2p+3q-r \end{array}\right.$$

Somit ist das Gleichungssystem lösbar falls $2p + 3q - r = 0$.

Lösung 2.7

Der Gauß-Algorithmus erzeugt die Schemata

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right. \quad |(-2)(-1)(1) \qquad , \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right. \quad |(-2)(-1)(1)$$

und weiter

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right. \quad |(3) \qquad , \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right. \quad |(3)$$

und in einem letzten Schritt

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 20 \end{array}\right. \quad |(4) \qquad , \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array}\right.$$

Die eindeutige Lösung lautet $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 7$, $x_4 = -4$.

Lösung 2.8

Mit dem Eliminationsverfahren folgt

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right. \qquad , \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right. \quad |(-2)(-4)(-6)$$

und weiter

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 & \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 & \\ 0 & 11 & 15 & -22 & 4 & \mid(7) \\ 0 & 17 & 25 & -37 & 8 & \mid(7) \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 & \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 & \mid(-11)(-17) \\ 0 & 77 & 105 & -154 & 28 & \\ 0 & 119 & 175 & -259 & 56 & \end{array}\right.$$

und somit

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 & \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 & \\ 0 & 0 & -60 & -88 & -60 & \\ 0 & 0 & -80 & -157 & -80 & \mid(3) \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 & \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 & \\ 0 & 0 & -60 & -88 & -60 & \mid(-4) \\ 0 & 0 & -240 & -471 & -240 & \end{array}\right.$$

und schließlich

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 15 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & -60 & -88 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & -119 & 0 \end{array}\right.$$

Hieraus folgt die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.

Lösung 2.9

a) Durch Vorwärtselimination ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ccc|c|l} 1 & 1 & 0 & 0 & \mid(-1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{ccc|c|l} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \mid(1) \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \end{array}\right.$$

und damit

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$.

b) Wiederum durch Vorwärtselimination ergibt sich

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mid(-1) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mid(1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}\right.$$

und damit

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mid(-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right.$$

Das Gleichungssystem besitzt nur die triviale Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

c) Eine erneute Vorwärtselimination liefert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \mid (-1) \end{array} \quad , \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid (1) \\ \\ \\ \end{array}$$

und damit

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid (-1) \\ \\ \end{array} \quad , \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid (1) \\ \end{array}$$

und schließlich

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hieraus ergeben sich unendlich viele Lösungen $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $x_4 = -t$, $x_5 = t$.

Lösung 2.10

Durch Einsetzen der Punkte P_1, P_2 und P_3 in die Parabel $y = a\,x^2 + b\,x + c$ erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & - & b & + & c & = & 2 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & -1 \end{array}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid (-1)(-4) \end{array} \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid (-3) \\ \\ \end{array}$$

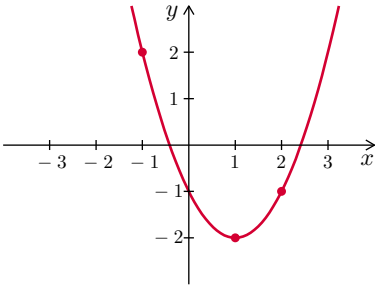
und damit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Zunächst folgt $c = -1$, daraus dann $b = -2$ und schließlich $a = 1$. Die gesuchte Parabel ist also

$$y = x^2 - 2x - 1\,.$$

Aus der Skizze ist ablesbar, dass P_2 der Scheitelpunkt der Parabel ist.



Lösung 2.11

Es bezeichne x das Alter des Vaters und y das Alter des Sohnes. Dann lauten die beiden Beziehungen zwischen x und y

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 62 \\ (x-6) & = & 4(y-6) \end{array}$$

Als Rechenschema erhält man

$$\left.\begin{array}{cc|c|l} 1 & 1 & 62 & |(-1) \\ 1 & -4 & -18 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cc|c|l} 1 & 1 & 62 & |(-1) \\ 0 & -5 & -80 & \end{array}\right.$$

Hieraus folgt $y = 16$ als Alter des Sohnes und daraus $x = 46$ als Alter des Vaters.

Lösung 2.12

Wir bezeichnen mit T_1 den inneren Punkt oben links, mit T_2 den inneren Punkt oben rechts, mit T_3 den inneren Punkt unten links und mit T_4 den inneren Punkt unten rechts. Die Bedingung über den Mittelwert der Temperaturwerte ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4T_1 & = & 0+0+T_2+T_3 \\ 4T_2 & = & 0+0+T_1+T_4 \\ 4T_3 & = & 0+20+T_1+T_4 \\ 4T_4 & = & 0+20+T_2+T_3 \end{array}$$

Wir bringen alle Terme mit T_k auf die linke Seite und die Absolutwerte auf die rechte Seite. Dann ergibt das Eliminationsverfahren

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 20 & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c|l} -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & |(4)(-1) \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 20 & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 & \end{array}\right.$$

und danach

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 15 & -1 & -4 & 0 & \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 20 & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c|l} -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 & |(-4)(15) \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 20 & \\ 0 & 15 & -1 & -4 & 0 & \end{array}\right.$$

und zuletzt

$$\left.\begin{array}{cccc|c|l} -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 & \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -60 & |(2) \\ 0 & 0 & -16 & 56 & 300 & \end{array}\right. \quad , \quad \left.\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 180 \end{array}\right.$$

Hieraus folgt die Lösung $T_1 = T_2 = 2.5\ ^\circ\mathrm{C}$ und $T_3 = T_4 = 7.5\ ^\circ\mathrm{C}$. Erwartungsgemäß sind die beiden Werte T_1 und T_2 und auch die beiden Werte T_3 und T_4 jeweils gleich.

3 Vektoren

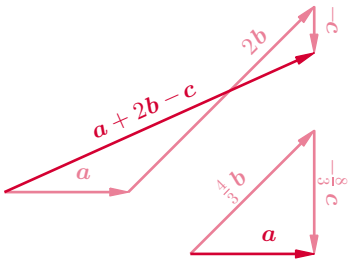
Lösung 3.1
Der Vektor

$$d = a + 2b - c$$

ist in der Skizze dargestellt. Ebenfalls mit einer Skizze lassen sich die Faktoren

$$\lambda_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{8}{3}$$

bestimmen.



Lösung 3.2
Mit $x = 2$ und $y = -3$ lässt sich der Betrag des Vektors a folgendermaßen darstellen:

$$7 = |a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 9 + z^2} \, .$$

Durch Quadrieren folgt eine Bedingung für z:

$$49 = 13 + z^2 \, .$$

Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $z = \pm 6$.

Lösung 3.3
Da $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ein Vektor ist, kann man zunächst

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2$$

schreiben. Mit der Definition des Skalar- und Vektorprodukts erhält man

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = \big(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big)^2 + \big(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big)^2$$

und damit schließlich

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \, |\boldsymbol{b}|^2 \big(\sin^2 \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \cos^2 \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \big) = |\boldsymbol{a}|^2 \, |\boldsymbol{b}|^2 \, .$$

Lösung 3.4

a) Wenn beide Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ungleich dem Nullvektor wären, dann bedeutet die Bedingung $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, dass die beiden Vektoren parallel oder antiparallel sind, und die Bedingung $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, dass die beiden Vektoren senkrecht zueinander sind. Dies ist ein Widerspruch. Es folgt also $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

b) Es ist

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \, .$$

Hieraus folgt $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ oder $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 45°$.

c) Es ist zunächst

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = \big(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\big)^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\,\cos^2\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\ .$$

Damit lautet die Bedingung

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2 \quad\Longleftrightarrow\quad |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\,\cos^2\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\ .$$

Daraus folgt $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ oder aber

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0,180^\circ\ .$$

Im dritten Fall sind die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ also parallel oder antiparallel.

Lösung 3.5

Für das Volumen gilt nach Definition

$$\hat{V} = |\boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)|\ .$$

Das Vektorprodukt kann man zunächst folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3 = (\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)\times(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)\ .$$

Mithilfe der Rechenregeln für das Vektorprodukt können wir den rechten Ausdruck ausmultiplizieren. Berücksichtigen wir, dass das Vertauschen der Faktoren beim Vektorprodukt das Vorzeichen umkehrt und dass das Vektorprodukt zweier gleicher Vektoren null ergibt, so erhalten wir zusammengefasst

$$\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3 = 3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)-3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\ .$$

Damit bekommen wir

$$\hat{V} = \Big|\big(-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3\big)\cdot\big(3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)-3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\big)\Big|\ .$$

Wiederum durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen unter Berücksichtigung der Rechenregeln für das Skalar- und Spatprodukt erhalten wir schließlich

$$\hat{V} = \big|(-6+3+3)\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\big| = 0\ .$$

Lösung 3.6

a) Wenn die beiden Ebenen E_1 und E_2 parallel sind, bedeutet das, dass auch die beiden Normalenvektoren parallel oder antiparallel sind. Es ist also $\boldsymbol{x_1}\times\boldsymbol{x_2}$ parallel oder antiparallel zu $\boldsymbol{n}$. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{x_1}\times\boldsymbol{x_2})=\boldsymbol{0}$.

b) Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind identisch, wenn sie parallel sind und mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Zur Bedingung $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{x_1}\times\boldsymbol{x_2})=\boldsymbol{0}$ kommt also noch die Bedingung, dass es Parameter λ und μ gibt mit

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x_0} = \lambda\boldsymbol{x_1}+\mu\boldsymbol{x_2}\ .$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{p}$ den Ortsvektor des Punktes P. Diese zweite Bedingung lässt sich parameterfrei formulieren in der Form

$$[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}] = 0\ .$$

c) Sollen die beiden Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zueinander stehen, so liegt $\boldsymbol{n}$ in der von $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ aufgespannten Ebene. Dies bedeutet

$$[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}] = 0 \, .$$

Lösung 3.7

Für die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \, , \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} \, .$$

Mit den Rechenregeln für das Skalarprodukt gilt

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r}^2 - \boldsymbol{s}^2 = |\boldsymbol{r}|^2 - |\boldsymbol{s}|^2 = 0 \, .$$

Die Null ergibt sich, denn die Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}$ sind gleich lang. Ihre Länge ist nämlich gerade der Radius des Kreises.

Lösung 3.8

a) Für die Längen erhalten wir

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}, \quad |\boldsymbol{c}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \, .$$

b) Den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bestimmen wir mithilfe des Skalarprodukts zu

$$\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{22}{\sqrt{533}} \approx 17.6^\circ \, ,$$

den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ zu

$$\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{130}} \approx 74.7^\circ \, ,$$

und den Winkel zwischen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ zu

$$\sphericalangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \arccos \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{11}{\sqrt{410}} \approx 57.1^\circ \, .$$

c) Für die Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und den Achsen erhalten wir

$$\alpha_1 = \arccos \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 56.3^\circ, \quad \alpha_2 = \arccos \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 33.7^\circ \, ,$$

für die Winkel zwischen $\boldsymbol{b}$ und den Achsen erhalten wir

$$\beta_1 = \arccos \frac{b_1}{|\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{41}} \approx 38.7^\circ, \quad \beta_2 = \arccos \frac{b_2}{|\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{41}} \approx 51.3^\circ \, ,$$

und für die Winkel zwischen $\boldsymbol{c}$ und den Achsen erhalten wir

$$\gamma_1 = \arccos \frac{c_1}{|\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 18.4^\circ, \quad \gamma_2 = \arccos \frac{c_2}{|\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{10}} \approx 108.4^\circ \, .$$

Der Vektor $\boldsymbol{c}$ bildet mit der negativen y-Achse einen Winkel von $180^\circ - 108.4^\circ = 71.6^\circ$.

d) Zunächst bilden wir den Vektor

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}.$$

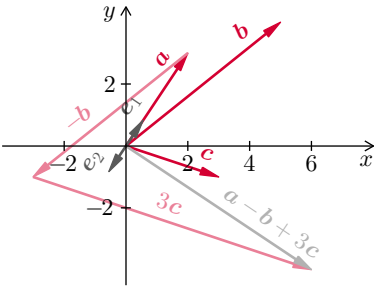
Zueinander senkrechte Vektoren haben ein Skalarprodukt gleich null. Für die beiden Vektoren senkrecht zu $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ erhalten wir also

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}.$$

e) Aus einer Skizze können alle Ergebnisse abgelesen werden. Auch die Bestimmung von

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$$

ist zeichnerisch möglich. Aus der Skizze wird auch klar, dass es zu einem Vektor stets zwei dazu senkrechte Einheitsvektoren gibt. Diese beiden Einheitsvektoren sind antiparallel zueinander.



Lösung 3.9

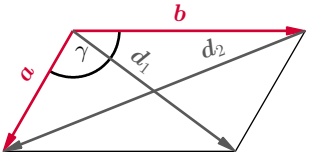
a) Zunächst gelten für die Winkel

$$\alpha=\sphericalangle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\quad \beta=\sphericalangle(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}),\quad \gamma=\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

die Werte

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{1}{2}.$$

Das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte Parallelogramm ist in der Skizze dargestellt. Unter Verwendung der Formel $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$ erhält man



$$|\boldsymbol{d}_1|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\gamma}.$$

Setzt man die gegebenen Zahlenwerte ein, so folgt $|\boldsymbol{d}_1|=\sqrt{19}$. Ganz analog ist

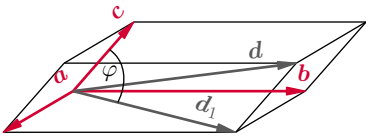
$$|\boldsymbol{d}_2|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\gamma}.$$

Hieraus folgt $|\boldsymbol{d}_2|=7$.

b) Es bezeichne φ den Winkel zwischen $\boldsymbol{d}_1$ und $\boldsymbol{c}$. Dann gilt für die Diagonale $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

$$|\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{c})}=\sqrt{\boldsymbol{d}_1^2+2\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{d}_1|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{d}_1|\,|\boldsymbol{c}|\cos\varphi}.$$

Den Kosinuswert können wir mit dem Skalarprodukt berechnen und dabei anschließend $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ berücksichtigen:



$$\begin{aligned} |\boldsymbol{d}| &= \sqrt{|\boldsymbol{d}_1|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + 2|\boldsymbol{d}_1|\,|\boldsymbol{c}|\,\frac{\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{d}_1||\boldsymbol{c}|}} \\ &= \sqrt{|\boldsymbol{d}_1|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})}\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Definition des Skalarprodukts erhalten wir eine schöne, symmetrische Formel für die Länge der Raumdiagonale:

$$|\boldsymbol{d}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\gamma + 2|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\alpha + 2|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{a}|\cos\beta} = 3\sqrt{3}\,.$$

c) Für den Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{d}$ gilt

$$\cos\delta_a = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|\cos\gamma + |\boldsymbol{c}|\cos\beta}{|\boldsymbol{d}|} = -\frac{1}{6\sqrt{3}}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Winkel von $\delta_a \approx 95.5°$. Analog gilt für den Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d}$

$$\cos\delta_b = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{|\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{a}|\cos\gamma + |\boldsymbol{c}|\cos\alpha}{|\boldsymbol{d}|} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Winkel von $\delta_b = 30°$. Und schließlich gilt für den Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$

$$\cos\delta_c = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}|} = \frac{|\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}|\cos\beta + |\boldsymbol{b}|\cos\alpha}{|\boldsymbol{d}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Daraus ergibt sich ein Winkel von $\delta_c \approx 54.7°$.

d) Für die Projektionen gilt

$$\boldsymbol{d}_a = \frac{|\boldsymbol{d}|\cos\delta_a}{|\boldsymbol{a}|}\,\boldsymbol{a} = -\frac{1}{6}\,\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{d}_b = \frac{|\boldsymbol{d}|\cos\delta_b}{|\boldsymbol{b}|}\,\boldsymbol{b} = \frac{9}{10}\,\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{d}_c = \frac{|\boldsymbol{d}|\cos\delta_c}{|\boldsymbol{c}|}\,\boldsymbol{c} = \frac{3}{2}\,\boldsymbol{c}\,.$$

Lösung 3.10

a) Das Skalarprodukt von $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{c}$ muss null ergeben:

$$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1+3\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad (\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -12 + 3(1+3\lambda) + 5(1-\lambda) = 4\lambda - 4 = 0\,.$$

Hieraus folgt $\lambda = 1$.

b) Die Bedingung lautet

$$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}\,.$$

Mit den Vektoren aus Aufgabenteil a) ergibt sich

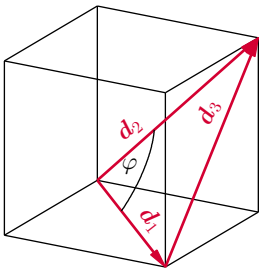
$$\lambda = -\frac{-12+3+5}{0+9-5} = -\frac{-4}{4} = 1 \,.$$

Das Problem ist nicht lösbar, falls $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$, falls also $\boldsymbol{b}$ senkrecht auf $\boldsymbol{c}$ steht.

Lösung 3.11

a) Die Antwort kann ohne Rechnung gegeben werden: Drei geeignet ausgewählte Flächendiagonalen bilden aus Symmetriegründen ein gleichseitiges Dreieck. Deshalb beträgt der Winkel $\varphi = 60^\circ$.

Möchte man den Winkel tatsächlich berechnen, so kann man für zwei benachbarte Flächendiagonalen



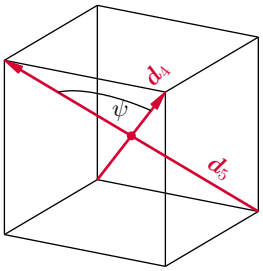
$$\boldsymbol{d}_1 = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_2 = a\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

das Skalarprodukt ansetzen:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2}{|\boldsymbol{d}_1||\boldsymbol{d}_2|} = \frac{a^2}{(a\sqrt{2})(a\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \,.$$

Auch hieraus folgt der Winkel $\varphi = 60^\circ$.

b) Man setzt zwei beliebige Raumdiagonalen an



$$\boldsymbol{d}_4 = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_5 = a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

und verwendet das Skalarprodukt:

$$\cos\psi = \frac{\boldsymbol{d}_4\cdot\boldsymbol{d}_5}{|\boldsymbol{d}_4||\boldsymbol{d}_5|} = \frac{a^2}{(a\sqrt{3})(a\sqrt{3})} = \frac{1}{3} \,.$$

Hieraus folgt der Winkel $\psi \approx 70.5^\circ$. Aus Symmetriegründen ist dieser Winkel für je zwei beliebige Raumdiagonalen stets gleich.

Lösung 3.12

a) Der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{b}$ ist

$$\boldsymbol{e}_b = \frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\,\boldsymbol{b} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix} \,.$$

b) Für die Komponente von $\boldsymbol{a}$ parallel zu $\boldsymbol{b}$ gilt

$$\boldsymbol{a}_b = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\,\boldsymbol{b} = \frac{15}{50}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

und für die Komponente normal zu $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 \\ -19 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

c) Der Vektor $\boldsymbol{a}$ hat die Winkel

$$\alpha_1 = \arccos\frac{-2}{3} \approx 131.8^\circ, \quad \alpha_2 = \arccos\frac{-1}{3} \approx 109.5^\circ, \quad \alpha_3 = \arccos\frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

mit den Koordinatenachsen und der Vektor $\boldsymbol{b}$ die Winkel

$$\beta_1 = \arccos\frac{-5}{\sqrt{50}} \approx 135.0^\circ, \quad \beta_2 = \arccos\frac{3}{\sqrt{50}} \approx 64.9^\circ, \quad \beta_3 = \arccos\frac{4}{\sqrt{50}} \approx 55.6^\circ.$$

Lösung 3.13

Die Mittelpunkte sind gerade die arithmetischen Mittelwerte der Eckpunkte:

$$M_{AB}(1\,|\,1\,|\,-1), \quad M_{AC}(1\,|\,0\,|\,0), \quad M_{BC}(0\,|\,1\,|\,0).$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist

$$A = \frac{1}{2}\big|(B-A)\times(C-A)\big| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ ist ein Viertel davon, also $A_M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dieses Ergebnis erhält man auch durch direkte Rechnung:

$$A_M = \frac{1}{2}\big|(M_{AC}-M_{AB})\times(M_{BC}-M_{AB})\big| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lösung 3.14

Die Oberfläche besteht aus den vier Dreiecksflächen

$$A_1 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \frac{\sqrt{3}}{2},\ A_2 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}| = \frac{\sqrt{3}}{2},\ A_3 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}| = \frac{\sqrt{3}}{2},\ A_4 = \frac{1}{2}|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und ist damit

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\sqrt{3}.$$

Das Volumen kann mit dem Spatprodukt bestimmt werden:

$$V = \frac{1}{6}\big|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}.$$

Lösung 3.15

Es ist $\boldsymbol{a}_2 = -\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1$. Damit sind die beiden Vektoren antiparallel und somit linear abhängig. Das Spatprodukt der drei Vektoren $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ und $\boldsymbol{b}_3$ ist

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \boldsymbol{b}_1 \cdot (\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Deshalb sind die drei Vektoren ebenfalls linear abhängig.

Lösung 3.16

a) Eine mögliche Parameterform der Geraden g lautet

$$g: \; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

b) Die Koordinaten des Mittelpunktes von P_1 und P_2 sind die arithmetischen Mittelwerte der Punktkoordinaten. Wir erhalten $M = \left(-3 \,|\, \frac{7}{2} \,|\, 5\right)$.

c) Mit der Formel für den Abstand erhalten wir

$$d = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{-28 - 8 + 44}{(-4)^2 + (1)^2 + (-4)^2} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$$

und durch Vereinfachung

$$d = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix} - \frac{8}{33} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{252714}}{33} \approx 15.23 \,.$$

d) Für die Winkel im Dreieck definiert man zunächst die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \overline{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \overline{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \overline{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Der Winkel an der Ecke P_1 ist dann gegeben durch

$$\sphericalangle(P_2, P_1, P_3) = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{8}{\sqrt{7722}} \approx 84.8^\circ \,,$$

der Winkel an der Ecke P_2 durch

$$\sphericalangle(P_1, P_2, P_3) = \arccos \frac{(-\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c}}{|-\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{25}{\sqrt{8283}} \approx 74.0^\circ$$

und der Winkel an der Ecke P_3 durch

$$\sphericalangle(P_1, P_3, P_2) = \arccos \frac{(-\boldsymbol{b}) \cdot (-\boldsymbol{c})}{|-\boldsymbol{b}|\,|-\boldsymbol{c}|} = \arccos \frac{226}{\sqrt{58734}} \approx 21.2^\circ \,.$$

Die Summe der drei Winkel ergibt gerade 180°.

e) Der Flächeninhalt lässt sich über das Vektorprodukt berechnen:

$$A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -43 \\ -72 \\ 25 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{7658}}{2} \approx 43.75\,.$$

f) Eine mögliche Parameterform der Ebene E lautet

$$E:\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

g) Für die Richtung der Geraden bestimmen wir einen Normalenvektor:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -43 \\ -72 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind gerade die arithmetischen Mittelwerte der Koordinaten der Ecken. Wir erhalten $S\left(0 \,\middle|\, \frac{2}{3} \,\middle|\, 2\right)$. Die Gerade h lautet also

$$h:\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -43 \\ -72 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Lösung 3.17

Zunächst bilden wir die Vektoren

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Da $\boldsymbol{b}$ kein Vielfaches von $\boldsymbol{c}$ ist, liegen die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden. Da das Spatprodukt

$$\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -97 \\ -18 \end{pmatrix} = 296$$

ungleich null ist, liegen die Punkte A, B, C und D nicht in einer Ebene.

Lösung 3.18

a) Durch Einsetzen der x-Komponenten der Geraden in die Ebenengleichung erhalten wir

$$3(2 + 2\lambda) + 4(3 - 3\lambda) - 2(-1 + \lambda) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 16 - 8\lambda = 0$$

und daraus den Parameterwert $\lambda = 2$. Eingesetzt in g ergibt sich der Schnittpunkt $S(6\,|\,-3\,|\,1)$.

b) Wir definieren zunächst den Richtungsvektor $\boldsymbol{a}$ von g und einen Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ von E:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Winkels verwenden wir das Skalarprodukt aus $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{n}$:

$$\varphi = \arcsin \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|} = \arcsin \frac{8}{\sqrt{406}} \approx 23.4^\circ.$$

c) Eine Parameterdarstellung der Geraden senkrecht zu E durch S ist

$$h: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

d) Für eine Parameterdarstellung von E benötigen wir zwei Richtungsvektoren von E. Dazu machen wir einen möglichst einfachen Ansatz zweier Punkte P_1 und P_2 mit den zugehörigen Vektoren $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$ in der Ebene:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = 1, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \implies z = -2\,.$$

Die gesuchten Richtungsvektoren sind $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$ und wir erhalten

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 3.19

a) Die Gerade g setzen wir in Punktrichtungsform an:

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst setzen wir die parameterfreie Ebenengleichung an:

$$E: \quad 2x + 3y + z = d\,.$$

Durch Einsetzen des Punktes P in die Ebenengleichung erhalten wir $d = 10$. Nun werden die Komponenten der Geradendarstellung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$2(6 + 2\lambda) + 3(5 + 3\lambda) + (2 + \lambda) = 10\,.$$

Hieraus folgt $\lambda = -\frac{19}{14}$ und damit der Durchstoßpunkt $S\left(\frac{46}{14} \,\middle|\, \frac{13}{14} \,\middle|\, \frac{9}{14}\right)$.

c) Wir normieren $\boldsymbol{n}$ und erhalten

$$\boldsymbol{n}_e = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der Abstand lässt sich nun durch Einsetzen von Q in die Hessesche Normalform berechnen:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 - 10}{\sqrt{14}} \right| = \frac{19}{\sqrt{14}} \approx 5.08 .$$

d) Die x-Achse schneidet die Ebene E unter der Bedingung

$$2\lambda + 0 + 0 = 10 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 5 \quad \Longrightarrow \quad S_x(5\,|\,0\,|\,0) .$$

Analog schneidet die y-Achse die Ebene E unter der Bedingung

$$0 + 3\lambda + 0 = 10 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{10}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{10}{3} \,\middle|\, 0\right)$$

und die z-Achse die Ebene E unter der Bedingung

$$0 + 0 + \lambda = 10 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 10 \quad \Longrightarrow \quad S_z\,(0\,|\,0\,|\,10) .$$

e) Aus Aufgabenteil d) folgt unmittelbar eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden in der x-y-Ebene:

$$g_{xy}: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ganz analog erhalten wir eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden in der x-z-Ebene:

$$g_{xz}: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

Eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden in der y-z-Ebene lautet:

$$g_{yz}: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Lösung 3.20

a) Wir berechnen Normalenvektoren für die beiden Ebenen:

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die beiden Vektoren $\boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{n}_2$ sind parallel, also sind es auch die beiden Ebenen E_1 und E_2.

b) Eine Parameterdarstellung der gesuchten Geraden g ist

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

c) Die Ebenen können parameterfrei geschrieben werden:

$$E_1: \quad -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \qquad E_2: \quad x_1 - x_2 - x_3 = -1 .$$

Durch Einsetzen der Geradenkomponenten erhalten wir

$$-9\nu_1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \nu_1 = -\frac{2}{3}, \qquad 3\nu_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \nu_2 = -\frac{1}{3}$$

und daraus die Schnittpunkte $S_1\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$ und $S_2\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$.

d) Für die Ebene E_1 ist ein normierter Normalenvektor

$$\boldsymbol{n}_e = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

In die parameterfreie Darstellung von E_1 können wir den Punkt $P(1\,|\,0\,|\,2)$ aus E_2 einsetzen:

$$d = \left| \frac{-3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 6}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 .$$

Alternativer Weg: Der Abstand der Ebenen ist gerade der Abstand der beiden Schnittpunkte aus Aufgabenteil c).

Lösung 3.21

Die vier Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ und $\boldsymbol{F}_4$ wirken in die vier Richtungen

$$\alpha_1 = 0^\circ, \quad \alpha_2 = 80^\circ, \quad \alpha_3 = 200^\circ, \quad \alpha_4 = 270^\circ .$$

Ein Kraftvektor besteht aus dem Kosinusanteil und dem Sinusanteil:

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{F}_k| \cos\alpha_k \\ |\boldsymbol{F}_k| \sin\alpha_k \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten also näherungsweise

$$\boldsymbol{F}_1 \approx \begin{pmatrix} 380 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 \approx \begin{pmatrix} 69 \\ 394 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3 \approx \begin{pmatrix} -282 \\ -103 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_4 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -440 \end{pmatrix}$$

und damit näherungsweise für die resultierende Kraft

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 \approx \begin{pmatrix} 167 \\ -149 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{F}| \approx 224\ \mathrm{N}, \quad \alpha \approx \arctan\frac{-149}{167} \approx 41.6^\circ .$$

Lösung 3.22

Wir bezeichnen den Winkel mit $\alpha = 20^\circ$ und die maximale Belastung des Seils mit $b = 1200\ \mathrm{N}$. Mit den Kräften

$$\boldsymbol{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} -b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \end{pmatrix}$$

gilt das Kräftegleichgewicht

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \,.$$

Aus der zweiten Komponente folgt

$$m = \frac{2b\sin\alpha}{g} \approx \frac{2400 \cdot 0.342}{9.81}\ \mathrm{kg} = 83.7\ \mathrm{kg}$$

als maximale Masse für die Lampe.

Lösung 3.23

a) Die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}$ setzt sich zusammen aus

$$\boldsymbol{F}_1 = 350\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = 300\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist also

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \approx \begin{pmatrix} 774 \\ 182 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{F}| \approx 795\ \mathrm{N}, \quad \alpha \approx \arctan\frac{182}{774} \approx 13.2^\circ \,.$$

b) Da der Gegenstand in Richtung $\boldsymbol{d}$ bewegt werden soll, gilt der Ansatz

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Komponente dieses Gleichungssystems lautet

$$\sqrt{3}\cdot 350 - \sqrt{2}\cdot 300 + 1000\sin\alpha = 0 \,.$$

Aufgelöst nach α ergibt sich

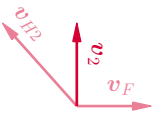
$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot 300 - \sqrt{3}\cdot 350}{1000} \approx -10.5^\circ \,.$$

Lösung 3.24

a) Wir bezeichnen mit $d = 100\ \mathrm{m}$ die Flussbreite, mit $\boldsymbol{v}_F$ die Strömungsgeschwindigkeit und mit $\boldsymbol{v}_{H1}$ die Eigengeschwindigkeit des Hundes. Die Überquerungszeit t und der Abtrieb a betragen damit

$$t = \frac{d}{|\boldsymbol{v}_{H1}|} = 166.7\ \mathrm{s}, \quad a = |\boldsymbol{v}_F|\,t = 66.7\ \mathrm{m} \,.$$

b) Wir bezeichnen die neue Eigengeschwindigkeit des Hundes mit $\boldsymbol{v}_{H2}$. Für die resultierende Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_{H2}$ gilt



$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.6 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Komponente folgt

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131.8^\circ.$$

Die entspricht einem Winkel von $131.8^\circ - 90^\circ = 41.8^\circ$ gegen die Senkrechte zur Strömung. Für die zweite Komponente und damit für die neue Überquerungszeit ergibt sich durch Einsetzen von α

$$b = |\boldsymbol{v}_{H1}| \sin\alpha \approx 0.447 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{d}{b} \approx 223.6 \,\mathrm{s}\,.$$

Lösung 3.25

Für die Kräfte setzen wir

$$\boldsymbol{F}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} -s_1 \\ -s \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}| \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

mit zunächst unbekannten Faktoren λ_1 und λ_2 an. Das Kräftegleichgewicht $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ ist ein lineares Gleichungssystem in λ_1 und λ_2:

$$\begin{aligned} s_1\lambda_1 + s_1\lambda_2 &= |\boldsymbol{F}| \sin\alpha \\ s\lambda_2 &= -|\boldsymbol{F}| \cos\alpha \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\lambda_2 = \frac{-|\boldsymbol{F}| \cos\alpha}{s} \approx -34641, \quad \lambda_1 = \frac{|\boldsymbol{F}| \sin\alpha - s_1\,\lambda_2}{s_1} \approx 47141\,.$$

Damit ist $\boldsymbol{F}_1$ eine Zugkraft und $\boldsymbol{F}_2$ eine Druckkraft:

$$\boldsymbol{F}_1 \approx \begin{pmatrix} -37712 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 \approx \begin{pmatrix} 27713 \\ 17321 \end{pmatrix}.$$

4 Matrizen

Lösung 4.1

Ob eine Matrix regulär ist oder nicht, lässt sich an ihrer Determinante ablesen:

$$|\boldsymbol{A}| = 0 - ab = -ab\,.$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist genau dann regulär, wenn sowohl a als auch b ungleich null ist. Die Aussage ist also wahr.

Lösung 4.2

a) Die Aussage ist falsch, denn die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist immer eine Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems.

b) Auch diese Aussage ist falsch. Immer wenn die Determinante einer Matrix gleich null ist, hat das zugehörige Gleichungssystem keine eindeutige Lösung, also entweder keine oder unendlich viele Lösungen. Ist das Gleichungssystem homogen, existiert stets die triviale Lösung. Es muss also unendlich viele Lösungen geben. Als Gegenbeispiel können wir das homogene Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

betrachten. Die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist null, es gibt unendlich viele Lösungen.

c) Diese Aussage ist wahr. Sie ist sogar unabhängig von der Determinanten, denn jedes homogene lineare Gleichungssystem besitzt mindestens eine Lösung, nämlich die triviale Lösung.

Lösung 4.3

a) Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix stehen in der Diagonalen und können direkt abgelesen werden:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_1 = 3\,.$$

b) Die Eigenwerte einer unteren Dreiecksmatrix stehen in der Diagonalen und können ebenfalls direkt abgelesen werden:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_1 = \sqrt{2} \quad \lambda_1 = \sqrt{3}\,.$$

c) Die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix stehen in der Diagonalen und können ebenfalls direkt abgelesen werden:

$$\lambda_1 = -2\pi \quad \lambda_1 = \pi \quad \lambda_1 = 3\pi\,.$$

Lösung 4.4

Wir multiplizieren die Eigenwertgleichung mit c:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad c\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = c\lambda\boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (c\boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = (c\lambda)\boldsymbol{v}$$

Lösung 4.5

Die Summe der Diagonalelemente einer Matrix wird auch als Spur bezeichnet. Bei einer $(2,2)$-Matrix gilt für das charakteristische Polynom einerseits

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathrm{spur}\boldsymbol{A}}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{|\boldsymbol{A}|}$$

und wegen der Faktorisierung andererseits

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\mathrm{spur}\boldsymbol{A}}\lambda + \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{|\boldsymbol{A}|}$$

Die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich. Bei einer $(3,3)$-Matrix gilt für das charakteristische Polynom nach Sarrus einerseits

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - (a_{11} - \lambda)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) \end{aligned}$$

Sortiert man diesen Ausdruck nach Potenzen von λ, so entsteht

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| &= -\lambda^3 + \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}_{\mathrm{spur}\boldsymbol{A}}\lambda^2 + (\ldots)\lambda + \\ &+ \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}_{|\boldsymbol{A}|} \end{aligned}$$

Wegen der Faktorisierung gilt andererseits

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_{\mathrm{spur}\boldsymbol{A}}\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{|\boldsymbol{A}|}$$

Die Behauptung folgt wiederum durch Koeffizientenvergleich. Die Aussagen lassen sich auch auf größere Matrizen verallgemeinern.

Lösung 4.6

Damit zwei Matrizen miteinander multipliziert werden können, muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Es ergeben sich also die 6 Produkte

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 13, \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.7

Wir erhalten zunächst

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich $\boldsymbol{A}^3$ berechnen:

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Durch nochmalige Multiplikation mit $\boldsymbol{A}$ erhalten wir

$$\boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}.$$

Ganz allgemein erhalten wir für beliebiges n

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.8

Wir berechnen zunächst

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2a-2 \\ 2a-2 & a^2+4 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt ist eine Diagonalmatrix genau dann, wenn $2a - 2 = 0$ ist, also wenn $a = 1$ ist.

Lösung 4.9

Mit den Bezeichnungen

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

können wir ein Matrixgleichungssystem schreiben:

$$\begin{array}{rcrcl} 2\boldsymbol{A} & - & 2\boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C}_1 \\ 4\boldsymbol{A} & + & \boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C}_2 \end{array}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit dem Faktor -2 und anschließender Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$5\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{5}(-2\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

und daraus

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}_1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.10

Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung können wir mit der Inversen von $\boldsymbol{Y}$ nach $\boldsymbol{A}$ auflösen

$$\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Y}^{-1} \cdot \boldsymbol{X} \, .$$

Die Inversen der Matrix $\boldsymbol{Y}$ bestimmen wir mit der Formel

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 17 - 5 \cdot 10} \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} .$$

Somit erhalten wir

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Y}^{-1} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -10 & -11 \end{pmatrix} .$$

Die zweite Gleichung können wir mit der Inversen von $\boldsymbol{Y}$ nach $\boldsymbol{B}$ auflösen

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}^{-1} \, .$$

Somit erhalten wir

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -30 & 9 \end{pmatrix} .$$

Ein alternativer Lösungsansatz besteht darin, die Einträge der Matrizen durch Lösen eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen.
Die beiden Spalten von $\boldsymbol{A}$ können unabhängig voneinander bestimmt werden. Deshalb schreiben wir das Gleichungssystem als Rechenschema und führen den Gauß-Algorithmus durch:

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 10 & 17 & 0 & 3 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \end{array}\right.$$

Im Gegensatz zum gewöhnlichen Algorithmus für lineare Gleichungssysteme steht hier auf der rechten Seite ebenfalls eine Matrix. Daraus lassen sich nun die Matrixeinträge von $\boldsymbol{A}$ bestimmen:

$$a_{21} = \frac{-10}{1} = -10, \quad a_{11} = \frac{1+50}{3} = 17, \quad a_{22} = \frac{-11}{1} = -11, \quad a_{12} = \frac{2+55}{3} = 19 \, .$$

Es ist also

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -10 & -11 \end{pmatrix} .$$

Ganz analog können die beiden Zeilen von $\boldsymbol{B}$ unabhängig voneinander bestimmt werden: Deshalb transponieren wir das Gleichungssystem, schreiben es als Rechenschema und führen den Gauß-Algorithmus durch:

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 5 & 17 & 2 & 3 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{cc|cc} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right.$$

Hieraus lassen sich die Matrixeinträge von $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ bestimmen:

$$b_{12} = \frac{1}{1} = 1, \quad b_{11} = \frac{1-10}{3} = -3, \quad b_{22} = \frac{9}{1} = 9, \quad b_{21} = \frac{0-90}{3} = -30\,.$$

Die gesuchte Matrix lautet also

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -30 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.11

a) Die Determinante berechnen wir folgendermaßen:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -9 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2) - (1)(-9) = 8 + 9 = 17\,.$$

b) Für die Matrix gilt

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

c) Wir bestimmen die Determinante durch

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab\,.$$

Lösung 4.12

a) Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} = (60 - 42 + 180) - (60 + 84 - 90) = 144\,.$$

b) Ebenfalls mit der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (384 + 72 - 48) - (-48 + 96 + 288) = 72\,.$$

c) Durch Entwickeln nach der vierten Spalte ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

und damit

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(4)(-134) + (5)(-28) - (1)(72) = 324\,.$$

Lösung 4.13
In Matrixform lautet das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ 2 & p & -1 \\ 0 & p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für die Determinante gilt nach der Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} p & -1 & 2 \\ 2 & p & -1 \\ 0 & p & 1 \end{vmatrix} = (p^2 + 0 + 4p) - (0 - p^2 - 2) = 2p^2 + 4p + 2 .$$

Wir setzen die Determinante gleich null:

$$2p^2 + 4p + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_{1,2} = -1 .$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar genau dann, wenn $p \neq -1$ ist.

Lösung 4.14

a) Die Inverse einer $(2,2)$-Matrix lässt sich mittels Formel berechnen:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{-8+9}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} .$$

b) Auch auf die Matrix $\boldsymbol{B}$ lässt sich die Formel anwenden:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2-0}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} .$$

c) Ganz analog erhalten wir

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Lösung 4.15
Mit der Formel für die Inverse erhalten wir

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Weiter ist

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ganz entsprechend

$$\boldsymbol{YB} = \boldsymbol{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Lösung 4.16

Der Nachweis der Inversen von $\boldsymbol{A}$ gelingt durch

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 36 & 28 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hieraus folgt also $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$. Da bei Matrizen die linksinverse Matrix stets gleich der rechtsinversen Matrix ist, folgt $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ muss ungleich null sein:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 0 + 0) - (0 + 0 - 8) = 2 .$$

Auch die Determinante der Matrix $\boldsymbol{B}$ muss ungleich null sein:

$$\frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 36 & 28 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\big((-12 + 0 + 0) - (0 + 0 - 16)\big) = \frac{1}{2} .$$

Hieraus folgt, dass die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme eindeutig sind. Das erste Gleichungssystem besitzt die Lösung

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 36 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

und das zweite die Lösung

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 36 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ 95 \end{pmatrix} .$$

Lösung 4.17

a) Die x_1-x_2-Achsen haben im y_1-y_2-Koordinatensystem folgende normierte Richtungen:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Damit können wir die orthogonale Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ aufstellen:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Im y_1-y_2-Koordinatensystem entstehen die neuen Koordinaten $\boldsymbol{b}_1$

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ -1 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und die neuen Koordinaten $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ und $\boldsymbol{b}_4$:

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + 3\sqrt{3} \\ -3 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + 3\sqrt{3} \\ -3 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ -1 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

b) Die x_1-x_2-Achsen haben im y_1-y_2-Koordinatensystem folgende normierte Richtungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit können wir die orthogonale Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ aufstellen:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Im y_1-y_2-Koordinatensystem entstehen die neuen Koordinaten $\boldsymbol{b}_1$

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und die neuen Koordinaten $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ und $\boldsymbol{b}_4$:

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.18

a) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir folgende Determinante:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-5-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 24\,.$$

Dieses charakteristische Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir folgende Determinante:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5\,.$$

Dieses charakteristische Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir folgende Determinante:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 5\lambda\,.$$

Dieses charakteristische Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -5$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung 4.19

a) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda\,.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_3 gilt

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\,.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_3 gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\boldsymbol{v}_3$ durch Probieren nicht abgelesen werden kann, dann helfen zwei Schritte des Gauß-Algorithmus.

c) Zur Berechnung der Eigenwerte bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -10 & 1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 10 \,.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 10$. Für Eigenvektoren zu λ_1 gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -10 & 1 & 11 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_2 gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -10 & 1 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und für Eigenvektoren zu λ_3 gilt

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Lösung 4.20

a) Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir zunächst die Matrix $3\boldsymbol{A}$. Die Determinante von $3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ berechnen wir durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$|3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} .$$

Wenn wir die entstehenden drei Unterdeterminanten ausrechnen, ergibt sich

$$|3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (2-\lambda)\big((2-\lambda)^2 + 2\big) + 1\big(2(2-\lambda) - 1\big) + 2\big(4 + (2-\lambda)\big) .$$

Multiplizieren wir aus und fassen zusammen, so folgt

$$|3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 18\lambda + 27 \,.$$

Da fast alle Koeffizienten Vielfache von 3 sind, vermuten wir 3 als einen Eigenwert von $3\boldsymbol{A}$. Durch Polynomdivision bestätigen wir diesen Eigenwert und stellen fest, dass das resultierende Polynom

$$-\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

keine reellen Nullstellen besitzt. Somit ist $\lambda_1 = 1$ der einzige reelle Eigenwert der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{A}$. Ein Eigenvektor dazu ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Definition $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$, sind alle Punkte in Richtung und Gegenrichtung von $\boldsymbol{v}_1$ Fixpunkte. Daher ist $\boldsymbol{v}_1$ die Drehachse. Zur Bestimmung des Drehwinkels benötigen wir einen Vektor, der senkrecht zur Drehachse ist, etwa

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor $\boldsymbol{w}$ wird auf den Vektor $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}$ abgebildet:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Skalarprodukts erhalten wir den Drehwinkel

$$\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 60^\circ.$$

b) Auch hier betrachten wir zunächst die Matrix $3\boldsymbol{A}$. Die Determinante von $3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ berechnen wir durch Entwicklung nach der zweiten Spalte:

$$|3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Wenn wir die entstehende Unterdeterminante ausrechnen, ergibt sich

$$|3\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (3-\lambda)\big((1-\lambda)^2 + 8\big) = (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 9\right).$$

Das quadratische Polynom hat keine reellen Nullstellen. Somit ist $\lambda_1 = 1$ der einzige reelle Eigenwert der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{A}$. Ein Eigenvektor dazu ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Definition $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$, sind alle Punkte in Richtung und Gegenrichtung von $\boldsymbol{v}_1$ Fixpunkte. Daher ist die y-Achse die Drehachse. Zur Bestimmung des Drehwinkels benötigen wir einen Vektor, der senkrecht zur Drehachse ist, etwa

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor $\boldsymbol{w}$ wird auf den Vektor $\boldsymbol{Aw}$ abgebildet:

$$\boldsymbol{Aw} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{8} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Skalarprodukts erhalten wir den Drehwinkel

$$\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{Aw}}{|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{Aw}|} = \arccos \frac{\frac{1}{3}}{1 \cdot 1} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5^\circ .$$

Lösung 4.21

a) Zunächst schreiben wir die quadratische Form mithilfe einer Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 .$$

Für die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ von $\boldsymbol{A}$ berechnen wir normierte Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und fassen diese spaltenweise in einer orthogonalen Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ zusammen:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die transformierten Koordinaten $\hat{x}$ und $\hat{y}$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

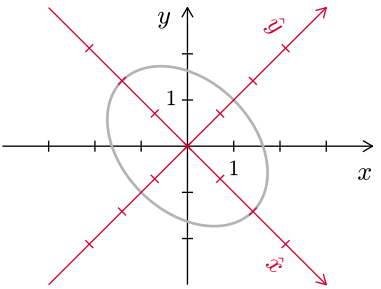
Wenn wir den rechten Term ausmultiplizieren, so erhalten wir

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8 \iff 2\hat{x}^2 + 4\hat{y}^2 = 8$$

oder umgeformt

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8 \iff \frac{\hat{x}^2}{4} + \frac{\hat{y}^2}{2} = 1$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und $\sqrt{2}$. Das Koordinatensystem ist um -45° gedreht.



b) Zunächst schreiben wir die quadratische Form mithilfe einer Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 .$$

Für die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ von $\boldsymbol{A}$ berechnen wir normierte Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und fassen diese spaltenweise in einer orthogonalen Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ zusammen:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die transformierten Koordinaten $\hat{x}$ und $\hat{y}$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

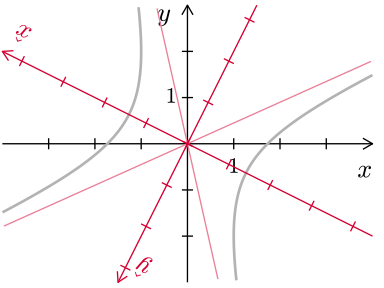
Wenn wir den rechten Term ausmultiplizieren, so erhalten wir

$$2x^2 - 4xy - y^2 = 6 \iff 3\hat{x}^2 - 2\hat{y}^2 = 6$$

oder umgeformt

$$2x^2 - 4xy - y^2 = 6 \iff \frac{\hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{y}^2}{3} = 1$$

Diese Gleichung beschreibt eine Hyperbel. Aus den Wurzeln der Nenner $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ berechnet man die Steigungen der Asymptoten $m = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.



Lösung 4.22

a) Die Beziehungen zwischen den Rohstoffen, den Zwischenprodukten und den Endprodukten lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

b) Setzt man beide Matrizen zu einem Gesamtproduktionsprozess zusammen, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 30 & 21 & 34 \\ 13 & 27 & 7 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Für 15 Endprodukte P_1 und 25 Endprodukte P_2 benötigt man folgende Rohstoffe:

$$\begin{pmatrix} 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 30 & 21 & 34 \\ 13 & 27 & 7 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Die Gesamtmenge der einzelnen Rohstoffe erhält man durch Ausmultiplizieren:

$$595\,R_1 + 1125\,R_2 + 490\,R_3 + 1110\,R_4 = 15\,P_1 + 25\,P_2\,.$$

Lösung 4.23

a) Eine Rotation ist um die Winkel $\varphi = 45° + k\,90°$ mit ganzzahligem k möglich. Deshalb ist die Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}$ nicht eindeutig. Für $\varphi = 45°$ in mathematisch positiver Richtung erhalten wir

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Streckungsmatrix ist eindeutig. Sie muss die alte Kantenlänge $\sqrt{8}$ in die neue Kantenlänge 2 transformieren:

$$\boldsymbol{S} = \frac{2}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{8}}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Der Kantenmittelpunkt $(2\,|\,2)$ wird durch Rotation um $\varphi = 45°$ auf den Punkt $\left(0\,|\,\sqrt{8}\right)$ und durch anschließende Streckung auf den Punkt $(0\,|\,2)$ abgebildet. Dieser Punkt soll nach der Transformation auf dem Punkt $(0\,|\,-1)$ liegen. Die Transformation erfolgt also mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4.24

a) Die gesuchte Matrix lautet

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch, sie besteht nur aus Nullen und Einsen.

c) Man könnte die Entfernung von S_i nach S_j in die Matrix aufnehmen. Die Symmetrie geht dadurch nicht verloren. Verzichtet man auf die Symmetrie, so könnte man im oberen Dreieck die Entfernung stehen lassen und in das untere Dreieck die Güte der Verkehrsverbindung aufnehmen.

5 Funktionen

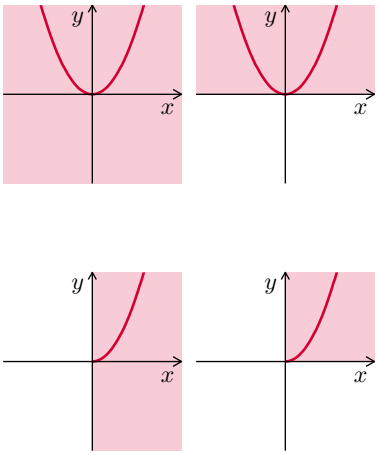
Lösung 5.1
Es ist $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Lösung 5.2

a) Diese Relation ist keine Funktion, da das Element 1 zwei Zuordnungen besitzt.
b) Diese Relation ist keine Funktion, da das Element 4 keine Zuordnung besitzt.
c) Diese Relation ist eine Funktion. Die Funktion ist nicht injektiv, da das Element b zweimal zugewiesen wird und nicht surjektiv, da das Element d gar nicht zugewiesen wird.
d) Diese Relation ist eine bijektive Funktion. Jedem Element aus M_1 wird genau ein Element aus M_2 zugeordnet und umgekehrt.

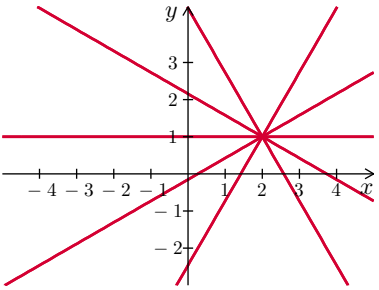
Lösung 5.3

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv und nicht surjektiv. Alle negativen Zahlen werden durch f, also durch Quadrieren, nicht erzeugt. Alle positiven Zahlen hingegen werden doppelt erzeugt, denn es ist $f(x) = f(-x) = x^2$.
b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, aber surjektiv. Jeder Wert des Intervalls $[0,\infty)$ wird von der Funktion f erzeugt, abgesehen von der null sogar jeweils doppelt.
c) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Negative Werte nimmt f nicht an.
d) Die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(x) = x^2$ schließlich ist injektiv und surjektiv und damit auch bijektiv.



Lösung 5.4

Die Funktionenschar $f(x) = a \cdot (x-2)+1$ besteht aus allen Geraden, die durch den Punkt $(2\,|\,1)$ gehen. Die senkrechte Gerade durch $(2\,|\,1)$ ist nicht als Funktion darstellbar und fehlt deshalb.



Lösung 5.5

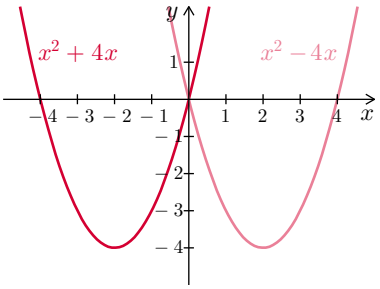
Entscheidend für die Anzahl der Lösungen ist das Vorzeichen der sogenannten Diskriminate $D = 4\omega^2 - 4$. Für $\omega > 1$ oder $\omega < -1$ gibt es zwei verschiedene Lösungen, für $\omega = \pm 1$ gibt es genau eine Lösung und für $-1 < \omega < 1$ gibt es keine Lösung.

Lösung 5.6

Der Scheitel der Parabel $y = x^2 + 4x$ liegt mittig zwischen den beiden Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 0$ also bei $S(-2\,|\,-4)$. Die gespiegelte Parabel hat den Scheitel $S'(2\,|\,-4)$, sie wird durch

$$y = (-x)^2 + 4(-x) = x^2 - 4x$$

dargestellt.



Lösung 5.7

$f(x) = -(x+2)^2 + 3$

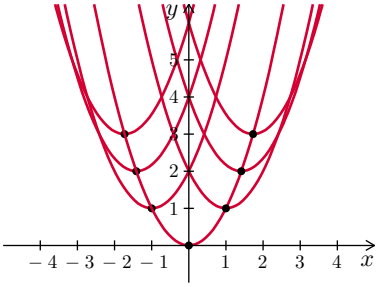
Lösung 5.8

Durch quadratisches Ergänzen erkennt man, dass die Parabelschar

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x-a)^2 + a^2$$

aus Parabeln mit Scheitelpunkten $(a\,|\,a^2)$ besteht. Die Kurve der Scheitelpunkte hat also die Funktionsgleichung

$$g(x) = x^2.$$



Lösung 5.9

a) Die Funktion $f(x) = \sqrt{4+x^2} - 1 - x$ ist für alle reellen Zahlen definiert. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0\,|\,1)$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse findet man mit der Gleichung

$$\sqrt{4+x^2} = 1 + x \Longrightarrow 4 + x^2 = 1 + 2x + x^2 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Wie immer ist beim Lösen von Wurzelgleichungen die Probe zu machen:

$$\sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 1 + \frac{3}{2}.$$

Also ist $(\frac{3}{2}\,|\,0)$ der einzige Schnittpunkt mit der x-Achse.

b) Die Funktion $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-4}} - 5$ ist nur für $x > 4$ definiert. Es gibt somit keinen Schnittpunkt

mit der y-Achse. Die Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich aus

$$\frac{x}{\sqrt{x-4}} - 5 = 0 \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x-4}} = 5 \Longrightarrow \sqrt{x-4} = \frac{x}{5} \Longrightarrow 25x - 100 = x^2.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} = 20,5.$$

Zur Probe setzen wir die Werte in die Ausgangsgleichung ein

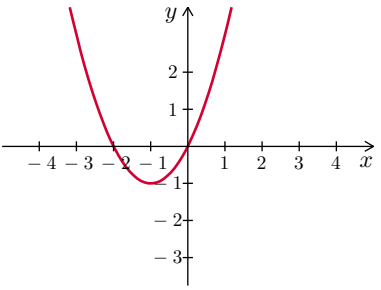
$$\frac{20}{\sqrt{20-4}} - 5 = 0, \qquad \frac{5}{\sqrt{5-4}} - 5 = 0$$

und haben somit zwei Schnittpunkte mit der x-Achse $(20\,|\,0)$ und $(5\,|\,0)$.

c) Die Funktion $h(x) = x + \sqrt{x-1}$ ist nur für $x \geq 1$ definiert. Somit gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. Die Schnittpunkte mit der x-Achse findet man aus der Bedingung $x + \sqrt{x-1} = 0$. Für $x \geq 1$ ist $x + \sqrt{x-1}$ immer größer gleich 1 und wird deshalb niemals null. Folglich gibt es keine Schnittpunkte mit den Achsen.

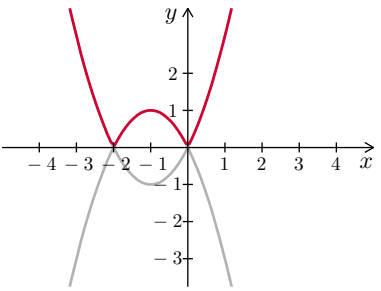
Lösung 5.10

a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ stellt eine nach oben geöffnete Normalparabel dar. Die Nullstellen sind bei $x = -2$ und $x = 0$. Deshalb ist der Scheitel bei $(-1\,|\,-1)$.



b) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -(x^2 + 2x) & \text{für } -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{für } x \leq -2 \end{cases}$$

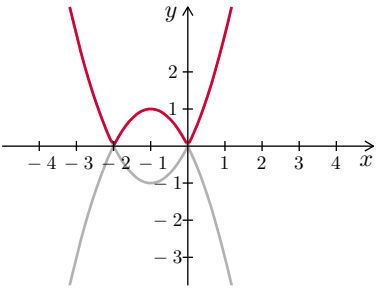


c)

Wegen

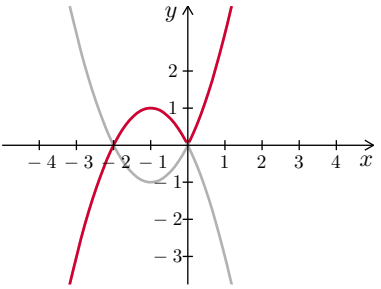
$$|x(x+2)| = |x||x+2|$$

ergibt sich dasselbe Schaubild wie in Aufgabenteil b).



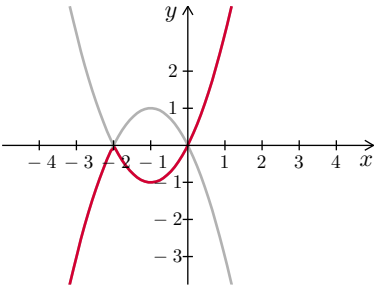
d) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{für } x \geq 0 \\ -x(x+2) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



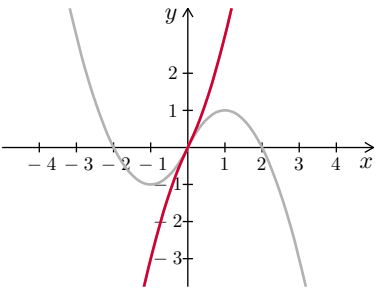
e) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{für } x \geq -2 \\ x(-(x+2)) & \text{für } x < -2 \end{cases}$$



f) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{für } x \geq 0 \\ x(-x+2) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



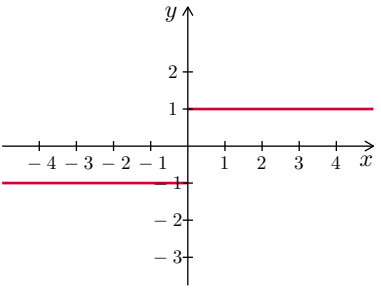
Lösung 5.11

a)

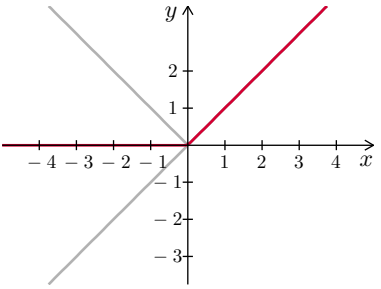
Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert.

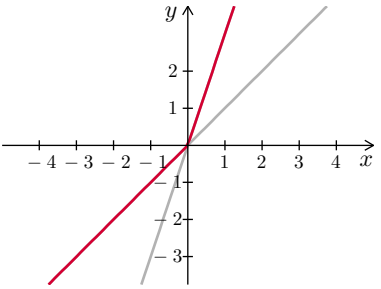


b) Die Funktion $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ ist der Mittelwert aus $g(x) = x$ und $h(x) = |x|$.



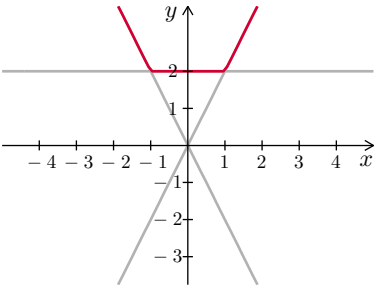
c) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x = 3x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 2x - x = x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$



d) Die Funktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 2 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ -2x & \text{für} \quad x \leq -1 \end{cases}$$



Lösung 5.12

a) Die Funktion $f(x) = \cos x \sin x$ ist ungerade, denn das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ergibt eine ungerade Funktion.

b) Die Funktion $f(x) = \sin x^2$ ist gerade, denn

$$f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x).$$

c) Die Funktion $f(x) = \sin^2 x$ ist gerade, denn

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x).$$

d) Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ist ungerade, denn

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x).$$

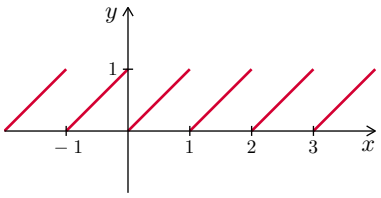
e) Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3}$ ist ungerade, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{(-x)^3} = \frac{x^4+1}{-x^3} = -f(x).$$

f) Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x+1}$ ist weder gerade noch ungerade, denn beispielsweise ist $f(2) = \dfrac{10}{3}$ und $f(-2) = \dfrac{-10}{-1} = 10$.

Lösung 5.13

Für x-Werte zwischen 0 und 1 besteht das Schaubild aus der ersten Winkelhalbierenden. Dieses Geradenstück wiederholt sich mit der Periode 1.



Lösung 5.14

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- Für $a > 0$ ist die Funktion bei beliebigem b immer beschränkt.
- Für $a = 0$ ergibt sich eine Definitionslücke bei $x = 0$ und wir müssen drei Fälle für b unterscheiden: Bei $a = 0$ und $b = 0$ ist die Funktion identisch null und damit sicher beschränkt. Bei $a = 0$ und positivem b sind alle Funktionswerte positiv und die Funktion ist durch 0 nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt. Bei $a = 0$ und negativem b sind alle Funktionswerte negativ und die Funktion ist durch 0 nach oben beschränkt, aber nicht nach unten beschränkt.
- Für $a < 0$ ergeben sich zwei Definitionslücken bei $x = \pm\sqrt[4]{-a}$ und wir müssen zwei Fälle für b unterscheiden: Bei $a < 0$ und $b = 0$ ist die Funktion identisch null und damit sicher beschränkt. Bei $a < 0$ und $b \neq 0$ ist die Funktion weder nach oben noch nach unten beschränkt.

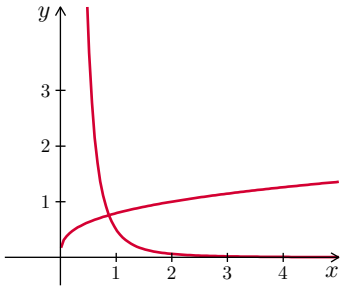
Lösung 5.15

Die Umkehrfunktion f^{-1} findet man durch Auflösen der Gleichung $y = 2x^3$ nach x und vertauschen von x und y

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}.$$

Der Kehrwert der Funktion ist

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{2x^3}.$$

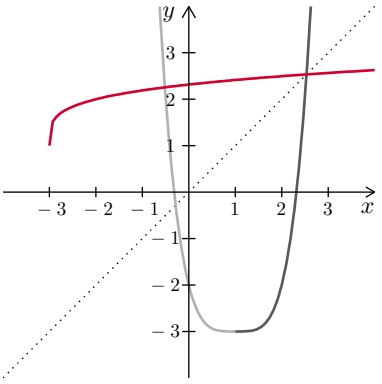


Den Schnittpunkt bestimmt man aus der Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2x^3} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{8x^9} \Longrightarrow \frac{1}{4} = x^10 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[10]{4}} \approx 0.8706.$$

Lösung 5.16

Das Schaubid der Funktion $f(x) = (x-1)^4 - 3$ ähnelt einer Normalparabel, die um 1 nach Rechts und um 3 nach unten verschoben wird. Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, die Wertemenge ist $[-3, \infty)$. Die Funktion ist auf $[1, \infty)$ streng monoton wachsend, also umkehrbar. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion lösen wir nach x auf:



$$y = (x-1)^4 - 3 \Longrightarrow \sqrt[4]{y+3} = x - 1 \Longrightarrow \sqrt[4]{y+3} + 1 = x$$

Durch Vertauschen von x und y ergibt sich die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x+3} + 1$. Das Schaubild entsteht durch Spiegeln an der ersten Winkelhalbierenden.
Für Spezialisten: Man könnte die Umkehrfunktion auch für das Intervall $(-\infty, 1])$ bestimmen. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x+3} + 1$.

Lösung 5.17

Da man die beiden Nullstellen kennt, ist die Parabel von der Form

$$f(x) = a \cdot (x - (2+\sqrt{3}))(x - (2-\sqrt{3})) = a \cdot (x^2 - 4x + 1).$$

Den Faktor a bestimmt man durch Punktprobe mit dem Punkt $(1\,|\,1)$:

$$1 = a \cdot (1^2 - 4 \cdot 1 + 1) \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Der Scheitel der Parabel liegt mittig zwischen den beiden Nullstellen, also bei $\left(2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$.

Lösung 5.18

Wir wenden die Symmetriebedingung $y_0 - f(x_0 - x) = f(x_0 + x) - y_0$ auf unsere Funktion an

$$\begin{aligned} y_0 - f(x_0 - x) &= y_0 - \left((x_0 - x)^3 - 3(x_0 - x)^2 + 3(x_0 - x) + 1\right) \\ &= y_0 - \left(x_0^3 - 3x_0^2 x + 3x_0 x^2 - x^3 - 3x_0^2 + 6x_0 x - 3x^2 + 3x_0 - 3x + 1\right) \\ &= y_0 - x_0^3 + 3x_0^2 x - 3x_0 x^2 + x^3 + 3x_0^2 - 6x_0 x + 3x^2 - 3x_0 + 3x - 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) - y_0 &= (x_0 + x)^3 - 3(x_0 + x)^2 + 3(x_0 + x) + 1 - y_0 \\ &= x_0^3 + 3x_0^2 x + 3x_0 x^2 + x^3 - 3x_0^2 - 6x_0 x - 3x^2 + 3x_0 + 3x + 1 - y_0 \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Ausdrücke vergleichen erhalten wir

$$y_0 - x_0^3 - 3x_0 x^2 + 3x_0^2 + 3x^2 - 3x_0 - 1 = x_0^3 + 3x_0 x^2 - 3x_0^2 - 3x^2 + 3x_0 + 1 - y_0.$$

Durch Koeffizientenvergleich

$$x^2(3 - 3x_0) = x^2(3x_0 - 3)$$

ergibt sich $x_0 = 1$ und daraus

$$y_0 - 1 + 3 - 3 - 1 = 1 - 3 + 3 + 1 - y_0.$$

Also muss $y_0 = 2$ sein.

Lösung 5.19

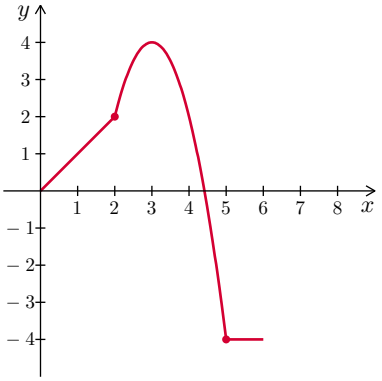
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in [0;2] \\ a(x-3)^2 + 4 & \text{für} \quad x \in (2;5] \\ c & \text{für} \quad x \in (5;6] \end{cases}$$

Man muss a so bestimmen, dass die Parabel an der Stelle $x = 2$ den Wert 2 hat

$$a(2-3)^2 + 4 = 2 \Longrightarrow a = -2.$$

Die Konstante c ergibt sich aus dem Funktionswert der Parabel an der Stelle $x = 5$

$$c = -2(5-3)^2 + 4 = -4.$$



Lösung 5.20

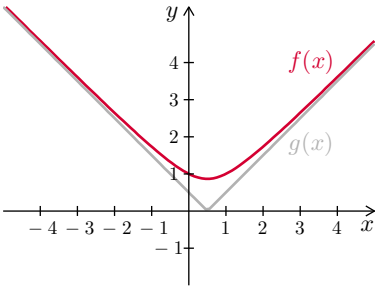
a)

Der Ausdruck unter der Wurzel x^2-x+1 hat keine Nullstelle, da die Diskriminante -3 ist, und somit negativ. Dadurch ist

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

für alle x-Werte definiert. Für die Wertemenge ist es geschickt den Scheitel der Parabel durch quadratisches Ergänzen zu berechnen:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad S\left(\tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{4}\right).$$



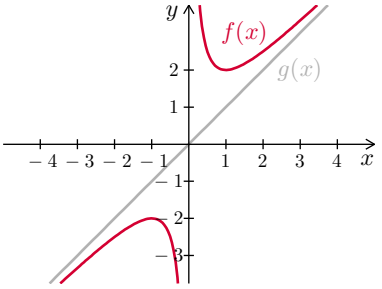
Die Wertemenge ist somit $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0\,|\,1)$, mit der x-Achse gibt es keine Schnittpunkte. Die Funktion ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben und sie ist weder monoton fallend noch monoton wachsend. Die Funktion ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse. In der Abbildung ist zum Vergleich außerdem die einfachere Funktion $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$ enthalten.

b) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$

ist für alle $x \neq 0$ definiert. Es gibt also keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. Um die Wertemenge zu ermitteln lösen wir die Funktionsgleichung nach x auf:

$$y = \frac{1}{x} + x\,, \quad x^2 - y\,x + 1 = 0\,, \quad x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$



Damit unter der Wurzel keine negative Zahl steht, kommen keine y-Werte aus dem Intervall $(-2, 2)$ in Frage. Für diese y-Werte gibt es also keinen x-Wert mit $y = f(x)$. Für alle anderen y-Werte gibt es einen entsprechenden x-Wert. Somit ist die Wertemenge $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse berechnet man aus

$$\frac{1}{x} + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} = -x \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -1.$$

Also gibt es auch keine Schnittpunkte mit der x-Achse. Aufgrund von

$$f(-x) = \frac{1}{-x} - x = -f(x)$$

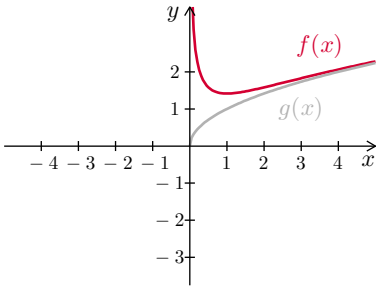
ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Für sehr kleine positive x-Werte und für sehr große positive x-Werte geht der Funktionswert gegen ∞. Die Funktion ist deshalb nicht nach oben beschränkt. Auf Grund der Punktsymmetrie ist sie auch nicht nach unten beschränkt. Außerdem ist sie weder monoton fallend noch monoton wachsend. In der Abbildung ist zum Vergleich außerdem die einfachere Funktion $g(x) = x$ enthalten.

c)

Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + x}$$

ist nur für positive x-Werte definiert. Die restlichen Eigenschaften der Funktion ergeben sich aus den Eigenschaften des Ausdrucks unter der Wurzel, den wir in der letzten Teilaufgabe untersucht haben. Die Wertemenge ist $\left[\sqrt{2}, \infty\right)$.



Es gibt keine Achsenschnittpunkte. Die Funktion ist nach unten aber nicht nach oben beschränkt und weder monoton fallend noch monoton wachsend. Die Funktion ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse. In der Abbildung ist zum Vergleich außerdem die einfachere Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ enthalten.

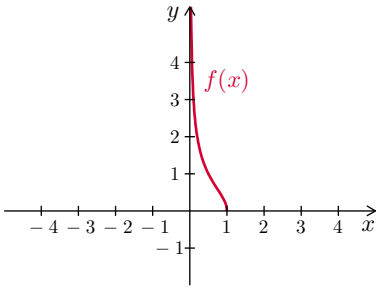
d) Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

ist nur für x-Werte definiert, für die der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist. Außerdem darf x nicht null sein. Es ist

$$\frac{1}{x} - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 1.$$

Somit ist die Funktion für $0 < x \leq 1$ definiert, die Wertemenge ist $[0, \infty)$.

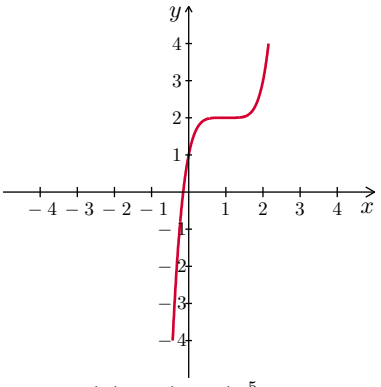


Es gibt einen Schnittpunkt mit der x-Achse $(1\,|\,0)$ und keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. Die Funktion ist nach unten aber nicht nach oben beschränkt und streng monoton fallend. Die Funktion ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

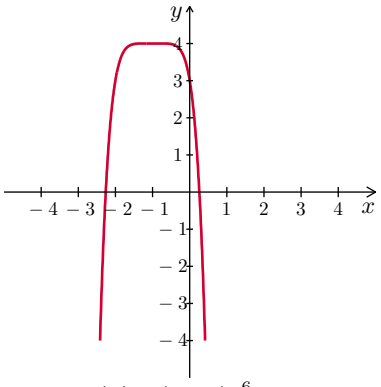
6 Elementare Funktionen

Lösung 6.1

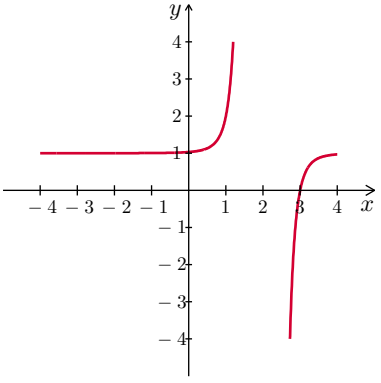
$f(x) = (x-1)^5 + 2$



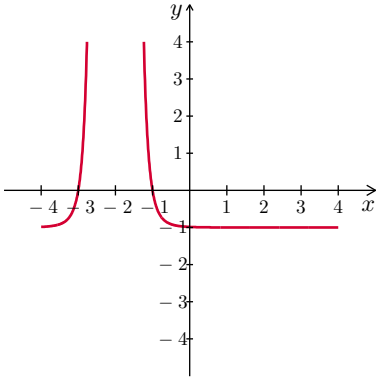
$f(x) = -(x+1)^6 + 4$



$f(x) = -(x-2)^{-5} + 1$



$f(x) = (x+2)^{-6} - 1$



Lösung 6.2

Es handelt sich um eine Schar von Polynomen mit den Funktionsgleichungen

$$p(x) = a\,(x+2)(x+1)\,x\,(x-1)(x-2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Man muss diesen Ausdruck nicht ausmultiplizieren. Wenn man ihn trotzdem ausmultiplizieren möchte, dann geht das geschickt mithilfe der dritten binomischem Formel

$$p(x) = a\,x\,(x+2)(x-2)\,(x+1)(x-1) = a\,x\,(x^2-4)(x^2-1) = a\,x\,(x^4 - 5\,x^2 + 4).$$

Lösung 6.3

Die Linearfaktorzerlegung ergibt sich aus

$$2\,x^3 - 8x = 2\,x(x^2-4) = 2\,x(x-2)(x+2).$$

Lösung 6.4

Ein mögliche Lösung ist durch die Funktionsgleichung

$$p(x) = (x-2)^2(x+2)^2 = ((x-2)(x+2))^2 = \left(x^2-4\right)^2 = x^4 - 8x^2 + 16.$$

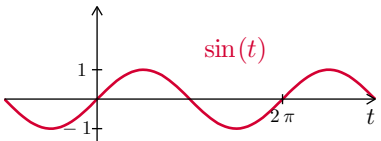
gegeben. Es gibt noch viel mehr Lösungen. Man kann das Polynom noch mit einem konstanten Faktor $a \in \mathbb{R}$ multiplizieren. Oder sogar noch mit beliebigen Polynomen, denn der Grad ist ja durch die Aufgabenstellung nicht vorgegeben.

Lösung 6.5

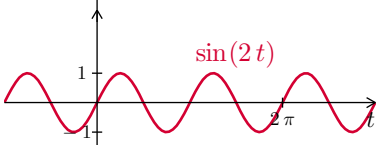
Das Polynom enthält genau dann den Linearfaktor $x+1$, wenn $x = -1$ eine Nullstelle ist. Das ist für ungerades n der Fall, denn bei der Berechnung von $p(-1)$ kommen dann 1 und -1 gleich oft vor. Bei geradem n ist $p(-1) = 1$.

Lösung 6.6

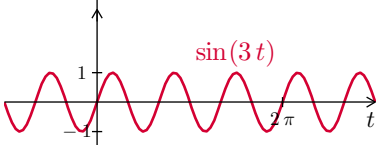
Für $\omega = 1$ hat die Funktion die kleinste Periode 2π.



Für $\omega = 2$ hat die Funktion auch die Periode 2π. Die kleinste Periode ist aber π.



Für $\omega = 3$ hat die Funktion auch die Periode 2π. Die kleinste Periode ist aber $\frac{2\pi}{3}$.



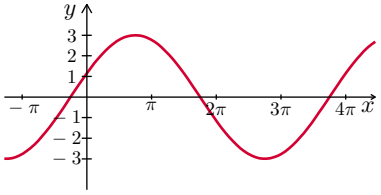
Lösung 6.7

a) Durch die Umformung

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 3\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

erkennt man, dass die Funktion eine allgemeine Sinusfunktion mit der Amplitude 3, der Periode 4π und der Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach Links ist.

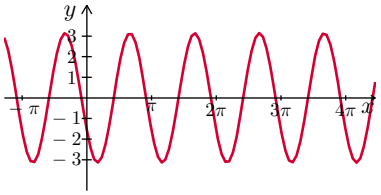
Die Nullstellen liegen bei $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Die Extremwerte liegen jeweils zwischen zwei Nullstellen, die Hochpunkte bei $-\frac{\pi}{4} + \pi + 4k\pi$ und die Tiefpunkte bei $-\frac{\pi}{4} + 3\pi + 4k\pi$.



b) Wir bringen die Funktion in die Form einer allgemeinen Kosinusfunktion. Dabei ist auch das negative Vorzeichen zu berücksichtigen

$$f(x) = -\pi \cos\left(2\,x - \frac{\pi}{3}\right) = \pi \cos\left(2\,x + \frac{2\,\pi}{3}\right) = \pi \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Die Amplitude beträgt π, die Periode ist π und eine Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach links liegt auch vor. Die Nullstellen liegen bei $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$, die Hochpunkte bei $-\frac{\pi}{3} + k\,\pi$ und die Tiefpunkte bei $\frac{\pi}{6} + k\,\pi$.

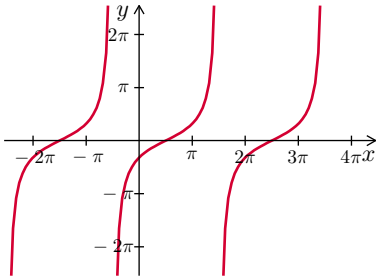


Lösung 6.8

Die x-Werte von Hoch- und Tiefpunkt unterscheiden sich um $3\,\pi$. Somit hat die Funktion die Periode $T = 6\,\pi$ und es ist $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{1}{3}$. Aus den y-Werten des Hoch- und des Tiefpunktes ergibt sich die Amplitude $A = 2$ und $m = 1$. Somit haben wir $f(t) = 1 + 2\,\cos\left(\frac{1}{3}\,t + \varphi\right)$. Wenn wir nun die Koordinaten des Hochpunktes einsetzen $3 = f(\pi) = 1 + 2\,\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi + \varphi\right)$ ergibt sich $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Lösung 6.9

Die Funktion f hat die doppelte Periode von $\tan x$, also Periode $2\,\pi$. Außerdem liegt eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts vor. Die senkrechten Asymptoten sind bei $3\,\frac{\pi}{2} + k2\,\pi$ für alle ganzen Zahlen k. Die Gleichung $\tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ besitzt die Lösung $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Alle Lösungen sind dann $x = 2\,k\,\pi$.

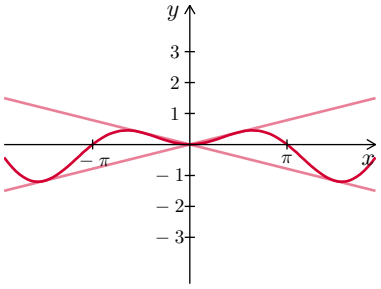


Lösung 6.10

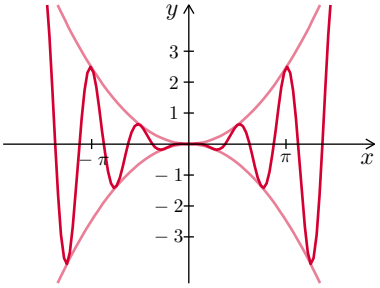
a) Die Funktion $\frac{1}{4}t\,\sin t$ hat dieselben Nullstellen wie die $\sin$-Funktion, also alle ganzzahligen Vielfachen von π. Die Multiplikation mit t bewirkt, dass die Amplitude proportional zu t anwächst. Ausserdem gilt

$$f(-t) = \frac{1}{4}\,(-t)\,\sin(-t) = \frac{1}{4}\,t\,\sin t = f(t),$$

folglich ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.

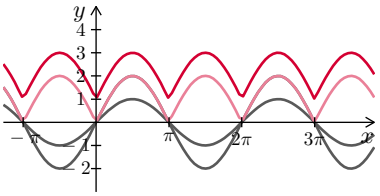


b) Die Funktion $\frac{1}{4}t^2\cos(4t)$ hat ihre Nullstellen bei $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$. Die Multiplikation mit t^2 bewirkt, dass die Amplitude proportional zu t^2 anwächst und dass die Funktion bei $t=0$ auch eine Nullstelle hat.



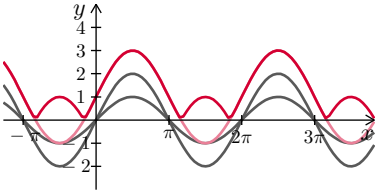
Lösung 6.11

a) Das Schaubild der Funktion $f(x)=|2\sin(x)|+1$ leitet man aus dem Schaubild der Funktion $\sin x$ ab. Zuerst Verdoppeln der Amplitude, dann negative Werte an der x-Achse spiegeln und zuletzt um 1 nach oben verschieben. Die betragsfreie Darstellung lautet



$$f(x)=\begin{cases} 2\sin(x)+1 & \text{für } x\in\ldots,[-4\pi,-3\pi],[-2\pi,-\pi],[0,\pi],[2\pi,3\pi],\ldots \\ -2\sin(x)+1 & \text{sonst}\end{cases}$$

b) Das Schaubild der Funktion $f(x)=|2\sin(x)+1|$ leitet man aus dem Schaubild der Funktion $\sin x$ ab. Zuerst Verdoppeln der Amplitude, dann um 1 nach oben verschieben und zuletzt negative Werte an der x-Achse spiegeln. Für die betragsfreie Darstellung müssen wir herausfinden, wann $2\sin(x)+1$ null wird, also wann hat der Sinus den Wert $-\frac{1}{2}$. Das ist aber genau für die x-Werte zwischen $\frac{7\pi}{6}$ und $\frac{11\pi}{6}$ der Fall. Die betragsfreie Darstellung lautet



$$f(x)=\begin{cases} 2\sin(x)+1 & \text{sonst} \\ -2\sin(x)-1 & \text{für } x\in\ldots,(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}),(\frac{19\pi}{6},\frac{23\pi}{6}),\ldots\end{cases}$$

Lösung 6.12

a) Eine Lösung der Gleichung $2\cos x=1$ ist $x_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. Aufgrund der Symmetrie ist dann auch $x_2=2\pi-\frac{\pi}{3}$ eine Lösung. Wegen der Periodizität haben die Schnittpunkte die x-Koordinaten

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi.$$

b) Eine Lösung der Gleichung $\sqrt{2}\sin(2x) = 1$ ist $x_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$. Aufgrund der Symmetrie ist dann auch $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ eine Lösung. Wegen der Periodizität haben die Schnittpunkte die x-Koordinaten

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi.$$

c) Eine Lösung der Gleichung $f(x) = \tan(3x) = 1$ ist $x_1 = \frac{1}{3}\arctan 1 = \frac{\pi}{12}$. Wegen der Periodizität haben die Schnittpunkte die x-Koordinaten

$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}.$$

Lösung 6.13

Den Schnittpunkt berechnet man aus der Gleichung

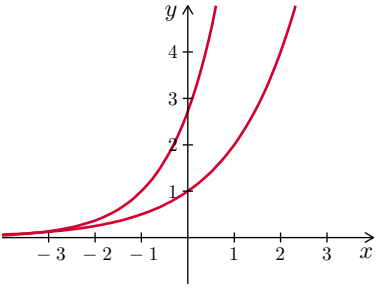
$$e^{x+1} = 2^x.$$

Logarithmieren ergibt

$$x + 1 = x\ln 2 \Longrightarrow x(1 - \ln 2) = -1$$

Die Lösung ist also

$$x = \frac{1}{\ln 2 - 1} \approx -3.2589.$$



Lösung 6.14

Durch Punktprobe ergibt sich $2 = ca^0$, also $c = 2$ und $1 = ca^1$, also $a = \frac{1}{2}$.

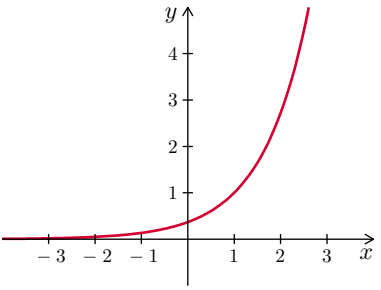
Lösung 6.15

Das Schaubild der Funktionen $f(x) = e^{x-1}$ entsteht aus e^x durch Verschieben um 1 in positiver x-Richtung.

a) Spiegeln an der x-Achse bedeutet, dass $f(x)$ zu $-f(x)$ wird, also $-e^{x-1}$.

b) Spiegeln an der y-Achse bedeutet, dass x durch $-x$ ersetzt wird, also e^{-x-1}.

c) Spiegeln an der 1. Winkelhalbierenden erzeugt die Umkehrfunktion, also



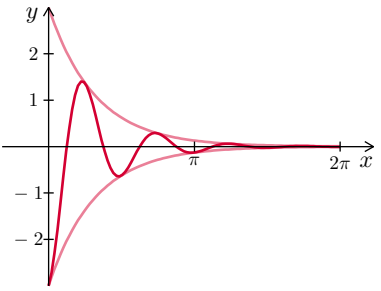
$$y = e^{x-1} \Longrightarrow \ln y = x - 1 \Longrightarrow x = \ln y + 1 \Longrightarrow f^{-1}(x) = \ln x + 1.$$

Lösung 6.16

Die Funktion $f(t)$ schwingt wie

$$\sin(4\,t-\frac{\pi}{2}) = -\cos(4\,t)$$

und die Amplitude verläuft im Trichter der beiden Exponentialfunktionen $3\,\mathrm{e}^{-t}$ und $-3\,\mathrm{e}^{-t}$. Die Achsenschnittpunkte sind bei $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$, dabei startet k bei null und durchläuft dann alle natürlichen Zahlen.



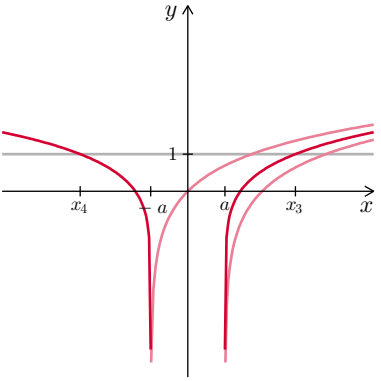
Lösung 6.17

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse und nur für $|x|>a$ definiert. Durch die Umformung

$$\ln\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln(x-a)(x+a)$$

$$\frac{1}{2}\ln(x-a)(x+a) = \frac{1}{2}(\ln(x-a)+\ln(x+a))$$

sieht man, dass $f(x)$ der Mittelwert aus der um eins nach Links und der ums eins nach Rechts verschobenen Logarithmusfunktion ist. Die Schnittpunkte ergeben sich aus



$$0 = \ln\sqrt{x^2-a^2} \quad\Longrightarrow\quad x^2-a^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{1+a^2}$$

und

$$1 = \ln\sqrt{x^2-a^2} \quad\Longrightarrow\quad x^2-a^2 = \mathrm{e}^2 \quad\Longrightarrow\quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\mathrm{e}^2+a^2}.$$

Lösung 6.18

Das Polynom

$$p(x) = \sum_{k=1}^{3}(-1)^k\,k^2\,x^k = -x+4\,x^2-9\,x^3 = x(-1+4\,x-9\,x^2)$$

hat nur eine einzige Nullstelle bei $x=0$, denn die quadratische Gleichung $-9\,x^2+4\,x-1=0$ hat keine Lösung.

Lösung 6.19

a) $\big(\;x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\big):\big(x^2+x+1\big) = x^3+1$

$$\begin{array}{r} -x^5-x^4-x^3 \\ \hline x^2+x+1 \\ -x^2-x-1 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} \big(\ x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\big):\big(x^2+x+1\big)=x^4+x+\dfrac{1}{x^2+x+1} \\ \underline{-x^6-x^5-x^4} \\ \qquad\qquad\quad x^3+x^2+x \\ \qquad\qquad\ \underline{-x^3-x^2-x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

Lösung 6.20

Die Nullstelle $x_1 = 1$ des Polynoms kann man durch Raten finden. Durch Polynomdivision ergibt sich dann

$$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x - 1) = x^2 + 3x - 10.$$

Die restlichen Nullstellen findet man mit der Mitternachtsformel

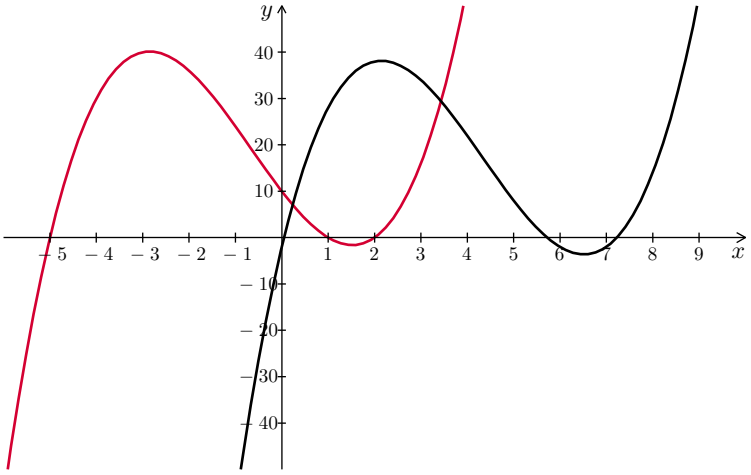
$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = 2, -5.$$

Die Zerlegung in Linearfaktoren lautet also

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+5).$$

In dieser Form kann man die Verschiebungen einfach durchführen

$$g(x) = (x-5-1)\cdot(x-5-2)\cdot(x-5+5)-2 = (x-6)\cdot(x-7)\cdot x-2 = x^3-13x^2+42x-2.$$



Lösung 6.21

a) Das Polynom

$$p(t) = t^6 + 6t^5 + 5t^4 = t^4 \cdot (t^2 + 6t + 5)$$

hat die vierfache Nullstelle $t_{1,2,3,4} = 0$ und die beiden Nullstellen

$$t_{5,6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = -1, -5.$$

Die Zerlegung in Linearfaktoren lautet deshalb

$$p(t) = t^6 + 6t^5 + 5t^4 = t^4 \cdot (t+1) \cdot (t+5).$$

b) Verwendet man die Substitution $u^4 = x$ bei dem Polynom $f(u) = u^8 - 15u^4 - 16$ so ergibt sich $x^2 - 15x - 16$ und die Nullstellen in x sind

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225+64}}{2} = 16, -1.$$

Die Gleichung $u^4 = 16$ hat die beiden Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -2$. Die Gleichung $u^4 = -1$ besitzt keine Lösung. Die Zerlegung in Linearfaktoren lautet deshalb

$$f(u) = u^8 - 15u^4 - 16 = (u-2)(u+2) \cdot \text{Rest}.$$

Den Rest kann man durch Polynomdivision

$$(u^8 - 15u^4 - 16) : (u^2 - 4) = u^6 + 4u^4 + u^2 + 4$$

bestimmen.

Lösung 6.22

a) Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Die Nullstelle $x_1 = -1$ kann man durch Raten finden und die weiteren Nullstellen $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ findet man durch Polynomdivision

$$\begin{array}{rl} \left(x^3 + x^2 - 4x - 4 \right) : \left(x+1 \right) = x^2 - 4 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ \quad -4x - 4 \\ \quad \underline{4x + 4} \\ \quad\quad 0 \end{array}$$

b) Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Die Nullstelle des Zählers $x_1 = -1$ kann man durch Raten finden und die weiteren Nullstellen findet man durch Polynomdivision

$$\begin{array}{rl} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) : \left(x+1 \right) = x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ \quad -3x^2 - x \\ \quad \underline{3x^2 + 3x} \\ \quad\quad 2x + 2 \\ \quad\quad \underline{-2x - 2} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Wegen $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ sind auch $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ Nullstellen des Zählers. Aber lediglich $x_3 = 2$ ist eine Nullstelle der Funktion. Zähler und Nenner enthalten die gemeinsamen Linearfaktoren $x+1$ und $x-1$. Somit gilt $f(x) = x - 2$.

Lösung 6.23

a)

$$
\begin{array}{l}
\big(\;x^3 \qquad\quad - 2x \;\; + 1\big) : \big(x-3\big) = x^2 + 3x + 7 + \dfrac{22}{x-3} \\
\underline{-x^3 + 3x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 2x \\
\qquad\;\; \underline{-3x^2 + 9x} \\
\qquad\qquad\qquad 7x \;\; + 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-7x + 21} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 22
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{l}
\big(\;4x^5 - x^4 + 2x^3 \;\; + x^2 \qquad\quad - 1\big) : \big(x^2+1\big) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{-4x^5 \qquad\quad - 4x^3} \\
\qquad\quad -x^4 - 2x^3 \;\; + x^2 \\
\qquad\quad\;\; \underline{x^4 \qquad\qquad + x^2} \\
\qquad\qquad\quad -2x^3 + 2x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-2x^2 \qquad\quad - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2x - 3
\end{array}
$$

Lösung 6.24

a) Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des Nenners

$$x^2 + 7\,x + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = -3, -4.$$

Für die beiden einfachen Nullstellen verwenden wir den Ansatz

$$\frac{x}{x^2 + 7\,x + 12} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}.$$

Für den Koeffizientenvergleich fassen wir die rechte Seite mit dem Hauptnenner zusammen

$$\frac{x}{x^2 + 7\,x + 12} = \frac{A(x+4) + B(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{A\,x + 4\,A + B\,x + 3\,B}{x^2 + 7\,x + 12}.$$

Dadurch erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{lcrcrcl}
x^0 & : & 4\,A & + & 3\,B & = & 0 \\
x^1 & : & A & + & B & = & 1
\end{array}
$$

mit der eindeutigen Lösung $A = -3$ und $B = 4$. Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{x}{x^2 + 7\,x + 12} = \frac{-3}{x+3} + \frac{4}{x+4}.$$

b) Der Nenner besitzt die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 1$, denn

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Dafür verwenden wir den Ansatz

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Für den Koeffizientenvergleich fassen wir die rechte Seite mit dem Hauptnenner zusammen

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{x^2-2x+1}.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcl} x^0 & : & -A & + & B & = & -1 \\ x^1 & : & A & & & = & 2 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung $A = 2$ und $B = 1$. Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

c) Durch Ausklammern von x

$$x^3 + x = x(x^2+1)$$

erkennt man, dass der Nenner nur eine einzige reelle Nullstelle hat, nämlich $x = 0$. Entsprechend laute der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Der Koeffizientenvergleich

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}$$

ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcl} x^0 & : & A & & & = & 1 \\ x^1 & : & & & C & = & 2 \\ x^2 & : & A & + & B & = & 5 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = 1$, $B = 4$ und $C = 2$. Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{4x+2}{x^2+1}.$$

Lösung 6.25

a) Mit der Doppelwinkelformel $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ergibt sich

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Substitution $u = \cos x$

$$2u^2 + u - 1 = 0 \quad \Longrightarrow u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -1, \frac{1}{2}.$$

Wir suchen also alle x-Werte bei denen $\cos x$ entweder -1 oder $\frac{1}{2}$ ist. Für $x = \pi + 2k\pi$ ist $\cos x = -1$. Innerhalb einer Periode nimmt $\cos x$ an zwei Stellen den Wert $\frac{1}{2}$ an, nämlich bei $x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ und bei $\frac{5\pi}{3}$. Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

$$x = \pi + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

dabei durchläuft k alle ganzen Zahlen.

b) Wir suchen alle Lösungen der trigonometrischen Gleichung

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kann man $\sin x$ durch $\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$ ersetzen. Die Gleichung lautet dann

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x = 1.$$

Durch die Substitution $u = \cos x$ wird die Gleichung einfacher

$$\pm\sqrt{1 - u^2} + u = 1.$$

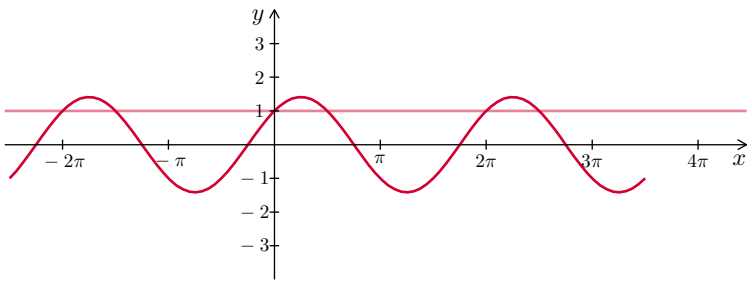
Diese Wurzelgleichung löst man durch separieren der Wurzel und Quadrieren:

$$\pm\sqrt{1-u^2} = 1-u \Longrightarrow 1-u^2 = (1-u)^2 \Longrightarrow 1-u^2 = 1-2u+u^2 \Longrightarrow 0 = -2u+2u^2 \Longrightarrow u_1 = 0, u_2 = 1.$$

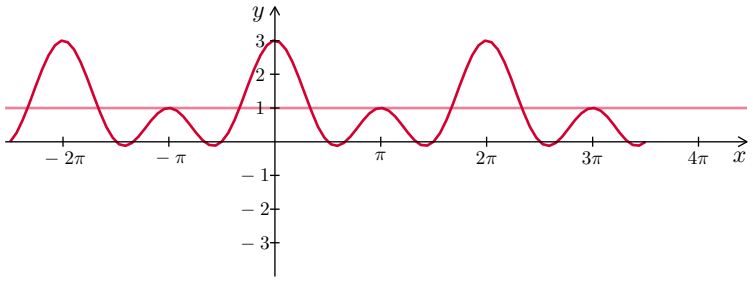
Die Probe zeigt, dass beide Werte die Ausgangsgleichung erfüllen. Wir müssen also alle x-Werte finden, bei denen $\cos x$ entweder 0 oder 1 ist. Für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ist $\cos x = 0$ und für $x = 2k\pi$ ist $\cos x = 1$. Dabei durchläuft k alle ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Lösung 6.26

a)



b)



Lösung 6.27

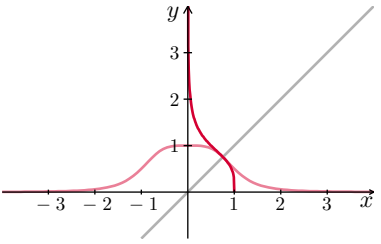
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}\right) = 1.$$

Lösung 6.28

a) Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, die Wertemenge ist $(0, 1]$. Wegen

$$f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^4} = \frac{1}{1+x^4} = f(x)$$

ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse. Den größten Wert hat $f(x)$ für $x = 0$, mit wachsenden x-Werten nehmen die Funktionswerte kontinuierlich ab.



Auf $[0, \infty)$ ist $f(x)$ somit streng monoton fallend, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion berechnet man durch Auflösen nach x:

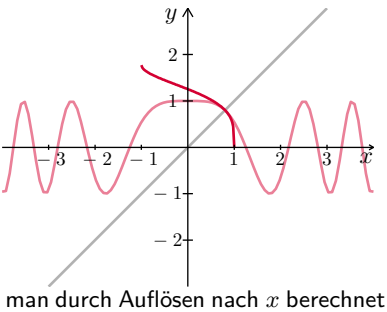
$$y = \frac{1}{1+x^4} \Longrightarrow \frac{1}{y} = 1 + x^4 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x} - 1}$$

Für Spezialisten: Man könnte die Umkehrfunktion auch für das Intervall $(-\infty, 0]$ bestimmen. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{\frac{1}{x} - 1}$.

b) Die Funktion $\cos x^2$ ist für alle reellen Zahlen definiert, die Wertemenge ist $[-1, 1]$. Wegen

$$f(-x) = \cos(-x)^2 = \cos x^2 = f(x)$$

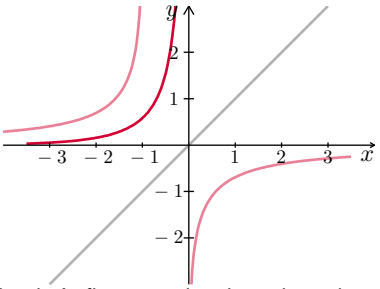
ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse. Die Funktion ist nicht periodisch. Auf $[0, \sqrt{\pi}]$ ist $f(x)$ streng monoton fallend, denn x^2 ist streng monoton wachsend und $\cos x$ streng monoton fallend.



In diesem Intervall gibt es also eine Umkehrfunktion, die man durch Auflösen nach x berechnet:

$$y = \cos x^2 \Longrightarrow \arccos y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{\arccos y} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\arccos y}$$

c) Die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ist nur definiert, falls $\frac{x}{x+1}$ positiv ist. Dies ist entweder für $x > 0$ oder für $x < -1$ erfüllt. $\frac{x}{x+1}$ ist streng monoton wachsend (das können Spezialisten dadurch beweisen, dass die erste Ableitung immer positiv ist) und somit auch $f(x)$ streng monoton wachsend, also umkehrbar.



Die Umkehrfunktion besteht aus zwei Teilen, die man durch Auflösen nach x berechnen kann:

$$y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Longrightarrow e^y = \frac{x}{x+1} \Longrightarrow (x+1)e^y = x \Longrightarrow x(e^y - 1) = -e^y \Longrightarrow x = \frac{e^y}{1-e^y}$$

Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$.

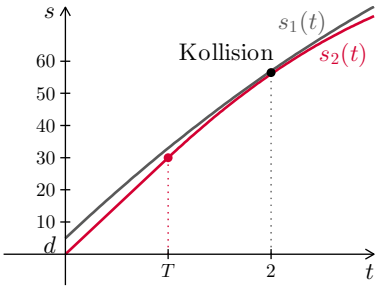
Lösung 6.29

Wir bezeichnen die Reaktionszeit mit $T = 1$ s. Der zurückgelegte Weg des vorausfahrenden Fahrzeugs beträgt

$$s_1(t) = d + vt + \frac{1}{2}a_1 t^2 = d + 30t - 2t^2$$

und der Weg des nachfolgenden Fahrzeugs für $t \geq T$

$$s_2(t) = vt + \frac{1}{2}a_2(t-T)^2 = 30t - 4(t-1)^2$$



Für Schnittpunkte von s_1 mit s_2 gilt

$$d + 30t - 2t^2 = 30t - 4(t-1)^2 \iff 2t^2 - 8t + (d+4) = 0 \iff t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 8(d+4)}}{2}$$

Diese quadratische Gleichung darf nur eine Lösung haben. Ansonsten würde das nachfolgende Fahrzeug in das vorausfahrende ein- und kurze Zeit später wieder austauchen. Es soll aber zu keiner Kollision kommen. Daher muss die Diskriminante D der Wurzel null sein:

$$D = 64 - 8(d+4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 4$$

Der Abstand beträgt somit (lediglich) 4 m! Diese Ergebnis ist sogar unabhängig von der Geschwindigkeit. Setzt man nun $d = 4$ und $a_1 = -8$ in die Wegfunktionen s_1 und s_2 ein, so erhält man nach dem Gleichsetzen für $t \leq T$

$$4 + 30t - 4t^2 = 30t \iff 4t^2 = 4 \iff t = \pm 1$$

Damit findet die Kollsion nach 1 s statt. Die negative Lösung für t ist hier nicht relevant. Die Geschwindigkeit des nachfolgenden Fahrzeugs beträgt $30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, das Fahrzeug kollidiert also ungebremst. Die Geschwindigkeit des vorausfahrenden Fahrzeugs beträgt $22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die relative Kollisionsgeschwindigkeit beträgt also $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

7 Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit

Lösung 7.1

a) Die Folge hat die Glieder

$$(a_k) = \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^2}\right) = 0, \frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, \frac{37}{36}, \dots$$

Alle Folgenglieder liegen zwischen 0 und 2, die Folge ist also beschränkt. Die Folge ist nicht monoton und nicht alternierend. Sie konvergiert gegen den Grenzwert 1.

b) Die Folge hat die Glieder

$$(b_k) = \left(\frac{2^{k+1}}{2^k - 10}\right) = -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -8, \frac{16}{3}, \frac{32}{11}, \frac{64}{27}, \dots$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k - 10} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1 - \frac{10}{2^k}} = 2$$

konvergiert die Folge gegen den Grenzwert 2. Alle Folgenglieder liegen sicherlich zwischen -8 und $\frac{16}{3}$, die Folge ist also beschränkt. Sie ist nicht monoton und nicht alternierend.

c) Die Folge hat die Glieder

$$(c_k) = \left(\frac{2^k}{k!}\right) = 2, 2, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}, \frac{64}{740}, \dots$$

Die Folge ist monoton fallend, abgesehen von den ersten beiden Gliedern sogar streng monoton fallend. Alle Folgenglieder liegen sicherlich zwischen 0 und 2, die Folge ist also beschränkt. Die Folge ist nicht alternierend. Sie konvergiert gegen den Grenzwert 0, da $k!$ schneller wächst als 2^k.

Lösung 7.2

Bei der Folge wird immer das Produkt aus den beiden letzten Folgengliedern gebildet.

a) Die Anfangsglieder $a_0 = 1$ und $a_1 = -\frac{1}{2}$ erzeugen die Folge

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \dots$$

Die Folge ist beschränkt, alle Glieder liegen sicher zwischen -1 und 1. Sie ist nicht monoton. Die Folge konvergiert gegen 0. Die Folge wechselt zwar das Vorzeichen, sie ist aber nicht alternierend.

b) Die Anfangsglieder $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$ erzeugen die Folge

$$1, 2, 2, 4, 8, 32, \dots$$

Die Folge ist nicht beschränkt. Sie ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend. Die Folge ist nicht konvergent und nicht alternierend.

c) Die Anfangsglieder $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ erzeugen die Folge

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

Die Folge ist beschränkt, sie ist monoton wachsend und monoton fallend, aber nicht streng monoton wachsend und nicht streng monoton fallend. Die Folge konvergiert gegen 1, sie ist nicht alternierend.

Lösung 7.3

Für die Folge $(c_k) = (a_k) + (b_k)$ ist die Aussage richtig, denn

$$c_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} > a_k + b_k = c_k,$$

also ist auch (c_k) streng monoton fallend. Wenn die Folge (a_k) durch A und die Folge (b_k) durch B beschränkt ist, dann gilt

$$|c_k| = |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| = A + B,$$

also ist die Folge (c_k) durch $A + B$ beschränkt.
Für die Folge $(d_k) = (a_k) - (b_k)$ ist die Aussage nicht richtig. Wenn die Folge (a_k) durch A und die Folge (b_k) durch B beschränkt ist, dann gilt

$$|d_k| = |a_k - b_k| \leq |a_k| + |b_k| = A + B,$$

also ist auch die Folge (d_k) durch $A + B$ beschränkt. Aber die Monotonie muss nicht erhalten bleiben, wie die Beispiele

$$a_k = \frac{1}{k}, \quad b_k = \frac{1}{k} \Longrightarrow d_k = 0, \text{ oder } a_k = \frac{1}{k}, \quad b_k = \frac{2}{k} \Longrightarrow d_k = -\frac{1}{k}$$

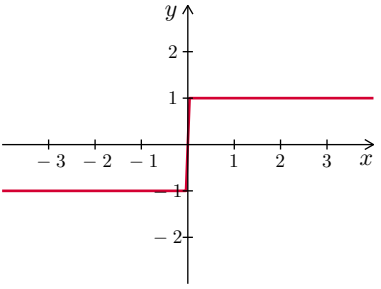
zeigen.

Lösung 7.4

a) Die Funktion

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

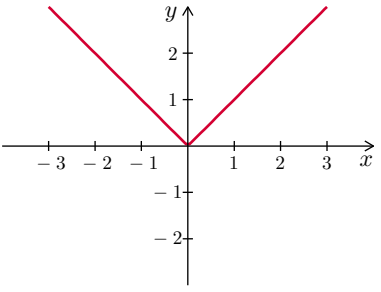
ist unstetig bei $x = 0$.



b) Die Funktion

$$f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$$

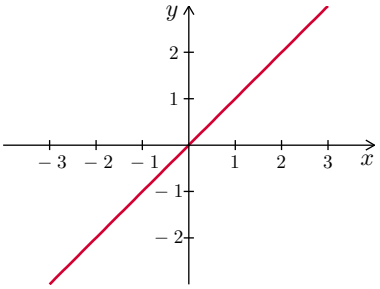
ist überall stetig.



c) Die Funktion

$$f(x) = |x|\operatorname{sgn}(x)$$

ist überall stetig.



Lösung 7.5

Die Behauptung ist natürlich falsch. Beispielsweise ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ unstetig. Aber die Funktion $f(x) \cdot f(x) = 1$ ist auf der Menge der reellen Zahlen stetig.

Lösung 7.6

Die Folge hat die Glieder

$$2, \frac{3}{2}, \frac{35}{27}, \dots$$

Man erkennt, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist. Also muss sie einen Grenzwert besitzen, der die Gleichung

$$a = \frac{2}{3}\left(a + \frac{1}{a^2}\right) \Longrightarrow a^3 = 2$$

erfüllt. Diese Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich $a = \sqrt[3]{2}$. Somit muss die Folge gegen den Grenzwert $a = \sqrt[3]{2}$ konvergieren.

Lösung 7.7

a) Die Folge (a_k) hat die asymptotische obere Schranke k, denn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3 + k^2 + k + 1}{k^3 + k^2 + k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}}{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} = 1.$$

b) Die Folge (b_k) hat die asymptotische obere Schranke 1, denn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^4 + 1}{k^4 + k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{k^4}}{1 + \frac{1}{k^3}} = 1.$$

c) Die Folge (c_k) hat die asymptotische obere Schranke k, denn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{9\,k^2 + 4\,k + 1}}{k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{9 + \frac{4}{k} + \frac{1}{k^2}} = 3.$$

Lösung 7.8

Die Substitution $m = 2n$ ergibt

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{2}m},$$

dabei ist zu beachten, dass wenn n gegen unendlich geht auch m gegen unendlich geht. Nun kann man noch umformen

$$\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \approx 4.4817.$$

Man kann das Ergebnis beispielsweise mit $n = 1000$ überprüfen

$$\left(1+\frac{1}{2000}\right)^{3000} \approx 4.4800.$$

Lösung 7.9

a) Ein Dreieck durch zwei benachbarte Ecken des einbeschriebenen n-Ecks und durch den Ursprung kann man in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Damit gilt für die Seitenlänge s_I und den Umfang U_I des einbeschriebenen n-Ecks

$$\sin\frac{2\pi}{2n} = \frac{s_I}{2} \quad\Longrightarrow\quad s_I = 2\sin\frac{\pi}{n} \quad\Longrightarrow\quad U_I(n) = 2n\sin\frac{\pi}{n}\,.$$

Analog gilt: Ein Dreieck durch zwei benachbarte Ecken des umschließenden n-Ecks und durch den Ursprung kann man ebenfalls in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Damit gilt für die Seitenlänge s_A und den Umfang U_A des umschließenden n-Ecks

$$\tan\frac{2\pi}{2n} = \frac{s_A}{2} \quad\Longrightarrow\quad s_A = 2\tan\frac{\pi}{n} \quad\Longrightarrow\quad U_A(n) = 2n\tan\frac{\pi}{n}\,.$$

b) Für $n = 3, 6, 10, 100$ ergeben sich die Werte der einbeschriebenen n-Ecke

$$U_I(3) = 5.1961524,\ U_I(6) = 6.0000000,\ U_I(10) = 6.1803399,\ U_I(100) = 6.2821518\,.$$

Hieraus folgt die Näherung $\pi \approx 3.1410759$. Für $n = 3, 6, 10, 100$ ergeben sich die Werte der umschließenden n-Ecke

$$U_A(3) = 10,392305,\ U_A(6) = 6,9282032,\ U_A(10) = 6,4983939,\ U_A(100) = 6,2852532\,.$$

Hieraus folgt die Näherung $\pi \approx 3.1416266$.

c) Es ist

$$\frac{U_I(n)}{U_A(n)} = \frac{2n\sin\frac{\pi}{n}}{2n\tan\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} \to 1 \quad (n\to\infty)\,.$$

Lösung 7.10

a) Es ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}\,.$$

b) Es ist

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\,.$$

c) Durch geschicktes Erweitern der Differenz erhält man

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}\right)}$$

und mit dem dritten Binom

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)-(x^2+3x)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}\right)}$$

und vereinfacht

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3x}\right)}=-\frac{3}{2}\,.$$

Das Ergebnis erkennt man, wenn man Zähler und Nenner jeweils durch x dividiert und dann die Grenzwerte für die einzelnen Terme bildet.

Lösung 7.11

Wegen der Symmetrie muss $x_0=\frac{\pi}{2}$ sein. Damit die Funktion f an der Stelle $x=\frac{\pi}{2}$ mit dem Sinus übereinstimmt, muss $b=1$ sein. Den Wert für a bestimmt man aus der Stetigkeitsbedingung

$$a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)^2+1=\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}}\Longrightarrow a=-\frac{9}{2\,\pi^2}.$$

Da sowohl die Parabel als auch der Sinus achsensymmetrisch zu der Geraden $x=\frac{\pi}{2}$ sind, ist f auch an der Stelle $x=\frac{5\,\pi}{6}$ stetig.

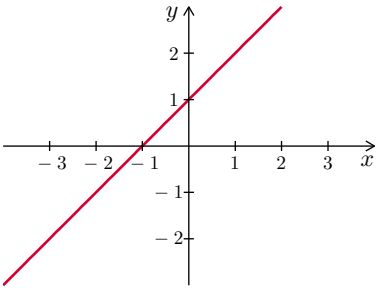
Lösung 7.12

a) Die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2+2\,x+1}{x+1}$$

ist stetig hebbar bei -1

$$\tilde{f}(x)=x+1.$$

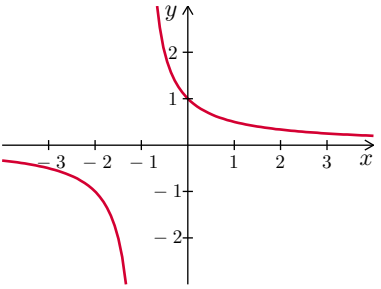


b) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

hat einen Pol bei -1 und ist stetig hebbar bei 3

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{x+1}.$$

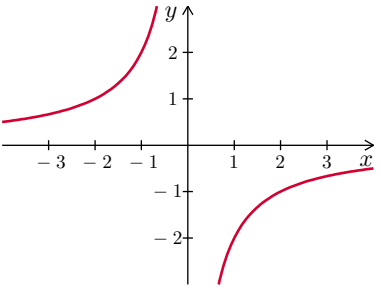


c) Die Funktion

$$f(x) = \frac{-x^2+x-6}{x^3-x^2+6x}$$

hat einen Pol bei 0 und ist stetig hebbar bei 3 und -2

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{x}.$$



Lösung 7.13

Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^n}$$

ist für alle reellen Zahlen außer $x = -1$ definiert. Die einzige Nullstelle ist $N(0\,|\,0)$. Wir untersuchen die Funktion für spezielle Werte von n.

n=1:

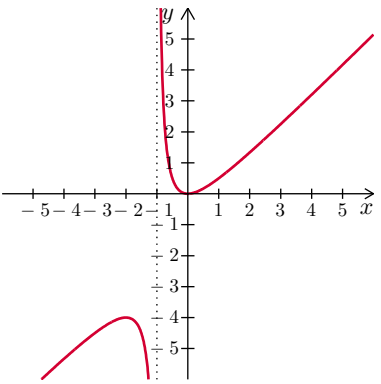
Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

ist unecht gebrochenrational und die Polynomdivision ergibt

$$x^2 : (x+1) = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Die Gerade $y = x-1$ ist schiefe Asymptote. Die Definitionslücke $x = -1$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.



n=2:

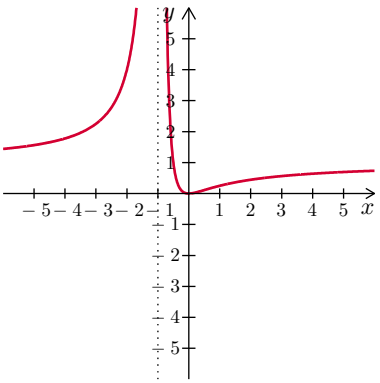
Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

ist unecht gebrochenrational und die Polynomdivision ergibt

$$x^2 : (x^2 + 2x + 1) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+2x+1}.$$

Die Gerade $y = 1$ ist waagrechte Asymptote. Die Definitionslücke $x = -1$ ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.



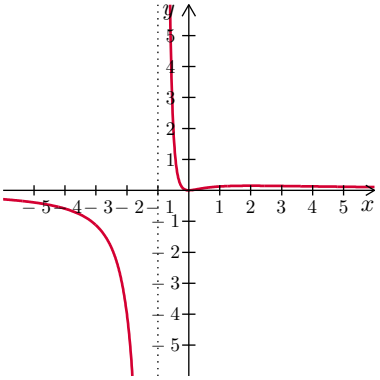
$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

n=3:

Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}$$

ist echt gebrochenrational. Die Gerade $y = 0$ ist waagrechte Asymptote. Die Definitionslücke $x = -1$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

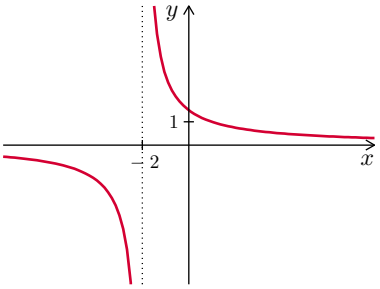


Lösung 7.14

a)

$$f(x) = \frac{3}{x+2}$$

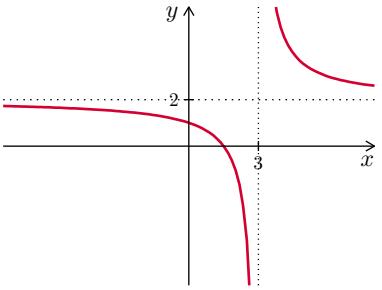
senkrechte Asymptote bei $x = -2$, Pol mit VZW, waagrechte Asymptote ist die x-Achse.



b)

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-3}$$

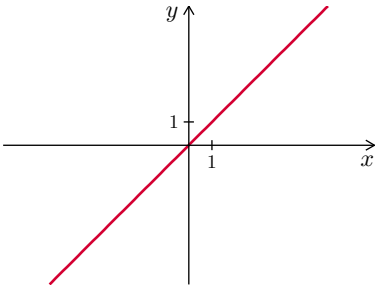
senkrechte Asymptote bei $x = 3$, Pol mit VZW, waagrechte Asymptote ist die Gerade $y = 2$.



c)

$$f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$$

kein senkrechte Asymptote, $f(x) = x$ ist die stetige Ergänzung und somit auch gleichzeitig die schiefe Asymptote.



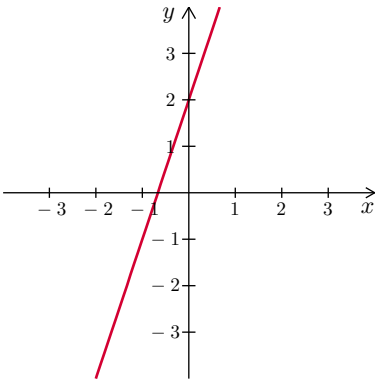
d) Die Funktion

$$f(x) = \frac{9x^2-4}{3x-2}$$

hat für $x = \frac{2}{3}$ eine Definitionslücke. Da es sich um eine unecht gebrochenrationale Funktion handelt machen wir Polynomdivision

$$(9x^2-4) : (3x-2) = 3x+2.$$

Die Stelle $x = \frac{2}{3}$ ist also eine hebbare Unstetigkeitsstelle. Wir können die Funktion an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ mit dem Funktionswert $f(\frac{2}{3}) = 4$ stetig ergänzen. Die einzige Nullstelle ist $x = -\frac{2}{3}$. Die Funktion hat keine Polstellen. Wenn man so will, dann ist die Funktion f identisch mit ihrer schiefen Asymptote $y = 3x+2$.

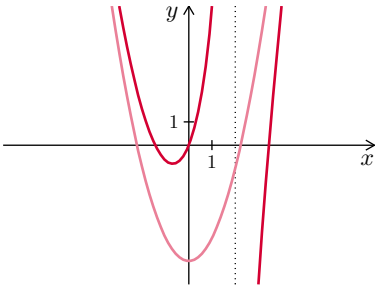


e)

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-5x}{x-2}$$

und

$$f(x) = \underbrace{x^2-5}_{\text{Asymptote}} \quad -\frac{10}{x-2}$$

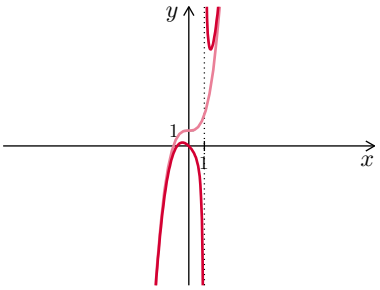


f)

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x}{x - 1}$$

und

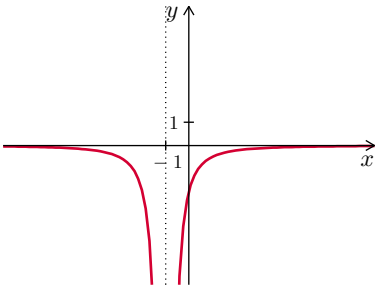
$$f(x) = \underbrace{x^3 + 1}_{\text{Asymptote}} + \frac{1}{x - 1}$$



g)

$$f(x) = \frac{-2}{x^2 + 2x + 1}$$

senkrechte Asymptote bei $x = -1$, Pol ohne VZW, waagrechte Asymptote ist die x-Achse.



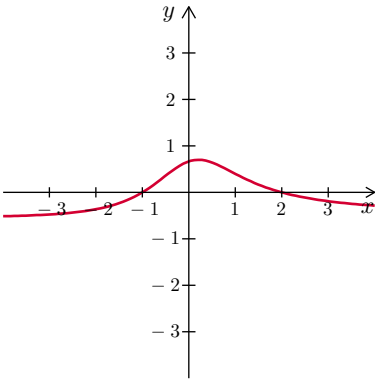
h) Die Funktion

$$f(x) = \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3}$$

ist für alle reellen Zahlen definiert, sie hat also keine Polstellen. Die Nullstellen sind

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} = 2, -1.$$

Die waagrechte Asymptote ist $y = -\frac{1}{2}$.

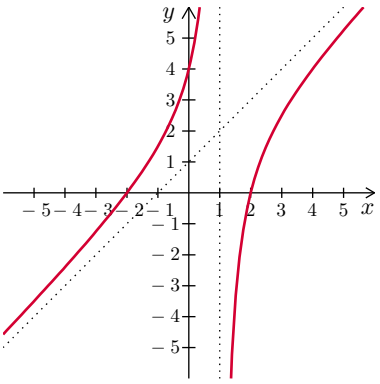


i) Die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 8x - 8}{2x^2 - 2}$$

hat bei $x = \pm 1$ zwei Definitionslücken. Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ (nicht in der Definitionsmenge) und $x = \pm 2$. Die Polynomdivision ergibt

$$f(x) = x + 1 - 6\frac{x + 1}{2x^2 - 2}.$$



Diesen Ausdruck kann man weiter vereinfachen

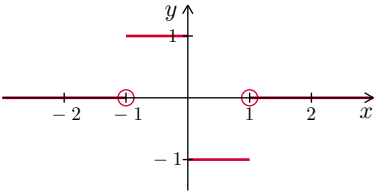
$$f(x) = x + 1 - 6\frac{x + 1}{2(x - 1)(x + 1)} = x + 1 - 3\frac{1}{x - 1}.$$

Die Gerade $y = x + 1$ ist schiefe Asymptote. Die Stelle $x = 1$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Die Stelle $x = -1$ kann durch $f(-1) = \frac{3}{2}$ stetig ergänzt werden.

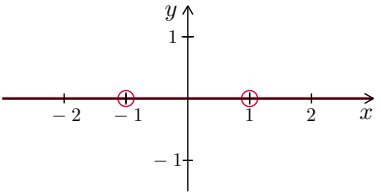
8 Differenzialrechnung

Lösung 8.1

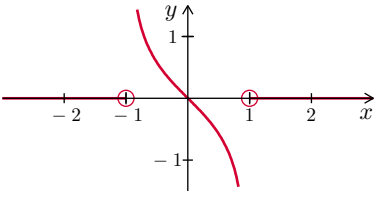
a) Die Funktion ist an der Stelle $x = -1$ (Steigungswechsel von 0 nach 1), an der Stelle $x = 0$ (Steigungswechsel von 1 nach -1) und an der Stelle $x = 1$ (Steigungswechsel von -1 nach 0) nicht differenzierbar.



b) Die Funktion ist an der Stelle $x = -1$ und an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar. Denn die Funktion ist an diesen Stellen noch nicht mal stetig (Sprungstellen).



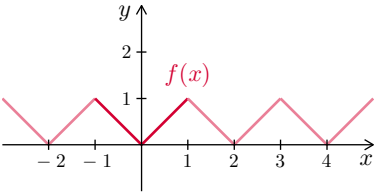
c) Die Funktion ist an der Stelle $x = -1$ (Steigungswechsel von 0 nach ∞) und an der Stelle $x = 1$ (Steigungswechsel von $-\infty$ nach 0) nicht differenzierbar.



Lösung 8.2

Eine Funktionen, die für alle reellen Zahlen definiert und überall stetig, aber an unendlich vielen Stellen nicht differenzierbar ist, ist beispielsweise die periodische Funktion $f(x) = |x|$, für $x \in [-1, 1]$, mit der periodischen Fortsetzung $f(x + 2) = f(x)$.

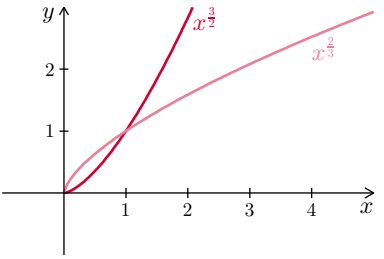
Diese Funktion ist überall stetig, aber an den Stellen $x = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ nicht differenzierbar, da sie an diesen Stellen Knicke hat. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten liefert an diesen Stellen jeweils unterschiedliche Werte.



Lösung 8.3

Die beiden Funktionen lauten

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad g(x) = x^{\frac{2}{3}} \; .$$



Zur Berechnung der Schnittpunkte kann man die Gleichung, die durch Gleichsetzen der beiden Funktionen entsteht, durch $x^{\frac{2}{3}}$ teilen. Dies ist jedoch nur erlaubt, falls $x \neq 0$. Die Division entspricht einer Multiplikation mit $x^{-\frac{2}{3}}$.

$$x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3}} \iff x = 0 \text{ oder } x^{\frac{5}{6}} = 1 \iff x = 0 \text{ oder } x = 1 \; .$$

Die Tangenten von $f(x)$ und $g(x)$ in $P(0\,|\,0)$ lauten

$$y = 0 \quad \text{(waagrechte Tangente)} \quad , \quad x = 0 \quad \text{(senkrechte Tangente)} \; .$$

Die Tangenten von $f(x)$ und $g(x)$ in $P(1\,|\,1)$ lauten

$$y = 1 + \frac{3}{2}(x-1) \quad , \quad y = 1 + \frac{2}{3}(x-1) \; .$$

Lösung 8.4

a) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-2\Delta x} - 1}{\Delta x}$ berechnet die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ an der Stelle $x = 0$, also

$$f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} \Longrightarrow f'(0) = -2\,\mathrm{e}^{0} = -2.$$

b) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2+\Delta x)^3 - 8}{\Delta x}$ berechnet die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$, also

$$f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(2) = 12.$$

c) Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{6} + \Delta x) - \frac{1}{2}}{\Delta x}$ berechnet die Ableitung von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $\dfrac{\pi}{6}$, also

$$f'(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Lösung 8.5

Die Aussage ist falsch, denn ein Polynom vom Grad n kann man nicht nur n mal, sondern beliebig oft differenzieren. Ab der $(n+1)$-ten Ableitung sind dann eben alle Ableitungen null.

Lösung 8.6

a) Durch Ableiten wird der Grad des Polynoms jedes mal um eins erniedrigt. Dadurch ergeben sich Faktoren, die wie bei der Fakultät aufgebaut sind

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
f'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1 \\
f''(x) &= n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 2a_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\ldots 2a_n x + (n-1)\ldots 2a_{n-1} \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n \\
f^{(n+1)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

b) Durch Ableiten wird der Grad des Polynoms jedes mal um eins erniedrigt. Zusätzlich zu dem Vorfaktor in Form einer Fakultät entsteht durch die innere Ableitung jeweils noch ein Faktor a_1

$$\begin{aligned}
f(x) &= (a_0 + a_1 x)^n \\
f'(x) &= n\,(a_0 + a_1 x)^{n-1}\cdot a_1 \\
f''(x) &= n(n-1)\,(a_0 + a_1 x)^{n-2}\cdot a_1^2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\ldots 2\,(a_0 + a_1 x)\cdot a_1^{n-1} \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_1^n \\
f^{(n+1)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung 8.7

a) Mit der Produktregel ergibt sich

$$f'(x) = (-1)\,(a+x) + (a-x)\,(1) = -2\,x.$$

b) Nach der dritten binomischen Formel gilt

$$f(x) = a^2 - x^2 \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = -2\,x.$$

Lösung 8.8

Zunächst wird der Schnittpunkt im Intervall $[0, \pi]$ berechnet:

$$\sin x = \cos x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4}\,.$$

Für die Steigungen werden die Ableitungen benötigt:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad\Longrightarrow\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Daraus ergibt sich der Schnittwinkel zu

$$\varphi = 2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 70.5^\circ\,.$$

Lösung 8.9

a) $\left(\left(1-x^2\right)^{10}\right)' = 10\left(1-x^2\right)^9 \cdot (-2x) = -20x\left(1-x^2\right)^9$

b) $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

c) $\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{2x\sqrt{x}-\left(x^2-1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{3x^2+1}{2x^{3/2}}$

d) $(\cosh x)' = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x$

e) $\left(\ln\sqrt{x}\right)' = \left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\dfrac{1}{2}\ln x\right)' = \dfrac{1}{2x}$

f) $(\tan(3x))' = \left(1+\tan^2(3x)\right)\cdot 3 = 3+3\tan^2(3x)$

Lösung 8.10

a) $\left(4\mathrm{e}^{-t}\right)' = -4\mathrm{e}^{-t}$

$\left(4\mathrm{e}^{-t}\right)'' = 4\mathrm{e}^{-t}$

b) $(3\sin(2t))' = 6\cos(2t)$

$(3\sin(2t))'' = -12\sin(2t)$

c) $\left(3t^2\mathrm{e}^{-2t}\right)' = 6t\mathrm{e}^{-2t} - 6t^2\mathrm{e}^{-2t} = 6t(1-t)\mathrm{e}^{-2t}$

$\left(3t^2\mathrm{e}^{-2t}\right)'' = (6-12t)\mathrm{e}^{-2t} + (6t-6t^2)\mathrm{e}^{-2t}(-2) = 6(1-4t+2t^2)\mathrm{e}^{-2t}$

d) $(-t\cos(2t-3))' = -\cos(2t-3) + 2t\sin(2t-3)$

$(-t\cos(2t-3))'' = 4\sin(2t-3) + 4t\cos(2t-3)$

e) $(C\cos(\omega t-\varphi))' = -C\omega\sin(\omega t-\varphi)$

$(C\cos(\omega t-\varphi))'' = -C\omega^2\cos(\omega t-\varphi)$

f) $\left(C\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)\right)' = -C\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t) + C\omega\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t) = C\mathrm{e}^{-\delta t}(\omega\cos(\omega t) - \delta\sin(\omega t))$

$\left(C\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)\right)'' = C\mathrm{e}^{-\delta t}\left((\delta^2-\omega^2)\sin(\omega t) - 2\omega\delta\cos(\omega t)\right)$

Lösung 8.11

a) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)' = \left((x+a)^{-1}\right)' = -(x+a)^{-2} = \dfrac{-1}{(x+a)^2}$

b) $\left(\dfrac{x}{x+a}\right)' = \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} = \dfrac{a}{(x+a)^2}$

c) $\left(\dfrac{x^2}{x^2+a}\right)' = \dfrac{2x\cdot(x^2+a)-x^2\cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \dfrac{2xa}{(x^2+a)^2}$

d) $\left(\sqrt{x+a}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$

e) $\left(\ln\left(x+a\right)\right)' = \dfrac{1}{x+a}$

f) $\left(\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^2+x^2}$

Lösung 8.12

a) $\left(\sqrt{1+\cos\varphi}\right)' = \dfrac{-\sin\varphi}{2\sqrt{1+\cos\varphi}}$

b) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{1-\omega}\right)\right)' = -\sin\left(\dfrac{1}{1-\omega}\right)\cdot\dfrac{1}{(1-\omega)^2}$

c) $\left(p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{h}{p_0}}\right)' = p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{h}{p_0}}\cdot\left(\dfrac{-1}{p_0}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{h}{p_0}}$

Lösung 8.13

Die Ableitung der Funktion $f(x) = 2^x$ kann man nicht mithilfe der Potenzregel bestimmen, da x im Exponenten steht. Deshalb bestimmt man die Ableitung mithilfe der e-Funktion

$$f(x) = 2^x = \mathrm{e}^{\ln 2^x} = \mathrm{e}^{x\ln 2} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln 2}(\ln 2)$$

Die Tangente hat die Steigung 1, falls die erste Ableitung den Wert 1 hat. Die Gleichung $f'(x) = 1$ löst man durch

$$\mathrm{e}^{x\ln 2}(\ln 2) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{x\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \quad\Longrightarrow\quad x\ln 2 = \ln\frac{1}{\ln 2} = -\ln\left(\ln 2\right).$$

Nach x aufgelöst erhalten wir

$$x = -\frac{\ln\left(\ln 2\right)}{\ln 2} \approx 0.5288.$$

Lösung 8.14

a) Durch Ableiten ergibt sich

$$f(x) = x^n \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = n\,x^{n-1} \quad\Longrightarrow\quad f''(x) = n\left(n-1\right)x^{n-2}\ldots$$

Die n-te Ableitung ist konstant $f^{(n)}(x) = n!$ und alle höheren Ableitungen sind null.

b) Durch Ableiten ergibt sich

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-2) \quad\Longrightarrow\quad f''(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-2)^2\ldots$$

Durch Ableiten entsteht also lediglich der Faktor -2 und die allgemeine Formel lautet

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-2x}(-2)^n$$

c) Durch Ableiten ergibt sich

$$f(x) = \sin(3x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3\cos(3x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -9\sin(3x) \ldots$$

Für die allgemeine Formel unterscheidet man am besten vier Fälle

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 3^n \sin(3x) & \text{für } n = 0, 4, 8, 12, \ldots \\ 3^n \cos(3x) & \text{für } n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -3^n \sin(3x) & \text{für } n = 2, 6, 10, 14, \ldots \\ -3^n \cos(3x) & \text{für } n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

d) Durch Ableiten ergibt sich

$$f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad f'''(x) = 2\,x^{-3} \ldots$$

Die allgemeine Formel lautet also

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

e) Zum Ableiten schreibt man die Funktion am besten in der Form

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1},$$

dadurch ergibt sich

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3} \ldots$$

Die allgemeine Formel lautet also

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}.$$

f) Zum Ableiten drückt man 2^x mithilfe der e-Funktion aus

$$f(x) = 2^x = \mathrm{e}^{\ln 2^x} = \mathrm{e}^{(\ln 2)\,x},$$

dadurch ergibt sich

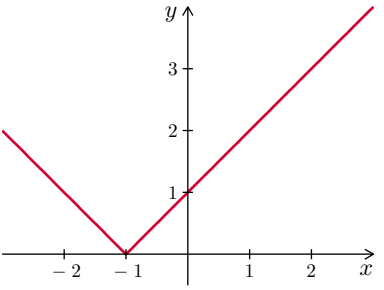
$$f'(x) = \mathrm{e}^{(\ln 2)\,x} \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \mathrm{e}^{(\ln 2)\,x} (\ln 2)^2 \ldots$$

Durch Ableiten entsteht also lediglich der Faktor $\ln(2)$ und die allgemeine Formel lautet

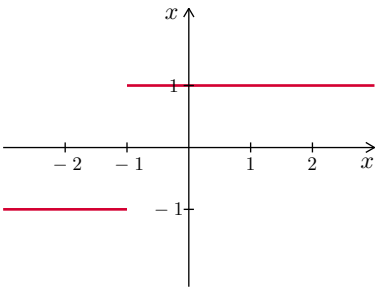
$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{(\ln 2)\,x} (\ln 2)^n = 2^x \cdot (\ln 2)^n .$$

Lösung 8.15

a) Die Funktion $f(x) = |x+1|$ verläuft stetig, das Schaubild hat keine Sprünge. An der Stelle $x = -1$ wechselt die Steigung von -1 auf 1. Die Funktion hat deshalb an der Stelle $x = -1$ einen Knick und ist dort nicht differenzierbar.

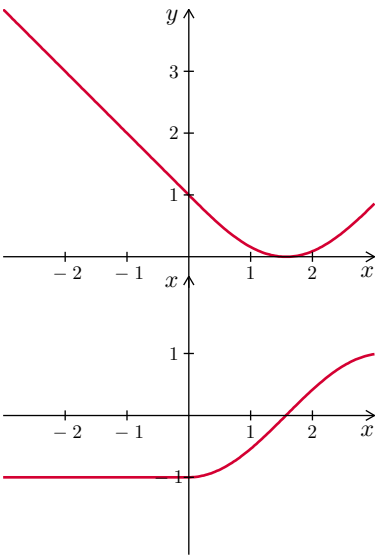


Die Ableitung hat im Intervall $(-\infty, -1)$ den Wert -1 und im Intervall $(-1, \infty)$ den Wert 1.



b) An der Nahtstelle $x = 0$ stoßen die beiden Funktionen f_1 und f_2 zusammen. Wegen $f_1(0) = 1$ und $f_2(0) = 1$ gibt es an der Nahtstelle keinen Sprung. Die abschnittsweise definierte Funktion ist somit stetig.

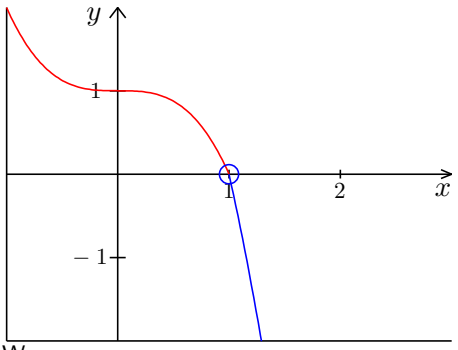
Wegen $f_1'(0) = -1$ und $f_2'(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$, also $f_2'(0) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ gibt es an der Nahtstelle keinen Knick. Die abschnittsweise definierte Funktion ist somit differenzierbar und die Ableitungsfunktion verläuft stetig.



Lösung 8.16
PapA41

Lösung 8.17
ToDo!!!

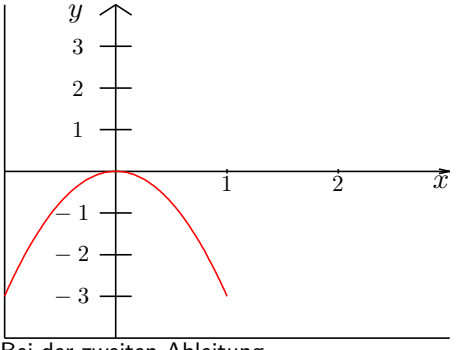
Lösung 8.18
a) Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 1$ aus zwei Funktionen zusammengesetzt. Für $x < 1$ ist $g(x) = 1 - x^3$ (x^3 an der y-Achse gespiegelt und um 1 nach oben verschoben). Für $x \geq 1$ ist $h(x) = 3(1 - x^2)$ (Parabel mit Scheitel bei $(0\,|\,3)$ und Schnittpunkten mit der x-Achse bei $(\pm 1|0)$). Wegen $g(1) = 0$ und $h(1) = 0$ ist $f(x)$ für alle reellen Zahlen stetig.



Wegen

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{für} \quad x < 1 \\ -6x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

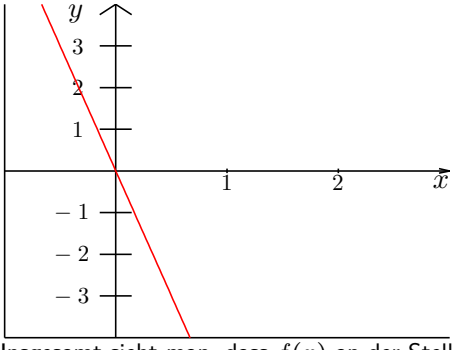
ist $g'(1) = -3$ und $h'(1) = -6$. Die Steigung der Funktion $f(x)$ wechselt an der Stelle $x = 1$ von -3 auf -6, also die Funktion ist nicht differenzierbar, sondern hat an der Stelle $x = 1$ einen Knick.



Bei der zweiten Ableitung

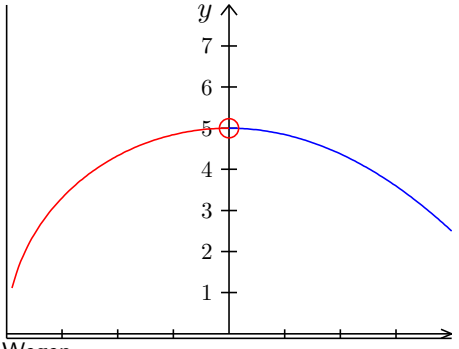
$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{für} \quad x < 1 \\ -6 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

haben $g''(1) = -6$ und $h''(1) = -6$ denselben Wert, also beide Funktionen haben dieselbe Rechtskrümmung.



Insgesamt sieht man, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

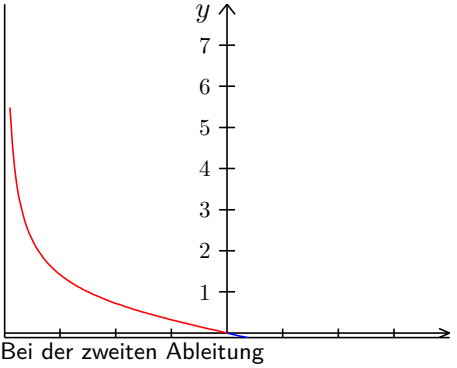
b) Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ aus zwei Funktionen zusammengesetzt. Für $-4 \le x \le 0$ ist $g(x) = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$ (Wurzelfunktion mit Nullstellen bei ± 4). Für $x > 0$ ist $h(x) = 5 - \frac{5}{32}x^2$ (Parabel mit Scheitel bei $(0\,|\,5)$ und Schnittpunkten mit der x-Achse bei $(\pm\sqrt{32}/0)$). Wegen $g(1) = 5$ und $h(1) = 5$ ist $f(x)$ stetig.



Wegen

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4}x(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{für} \quad -4 < x \le 0 \\ -\frac{5}{16}x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

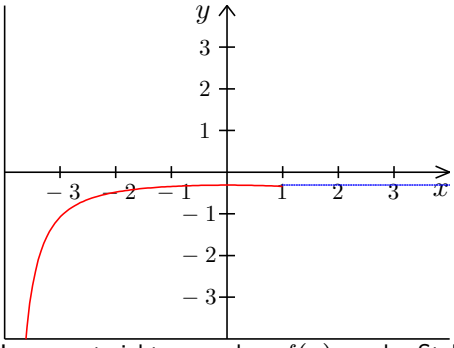
ist $g'(0) = 0$ und $h'(0) = 0$, also es liegt eine waagrechte Tangente vor und die Funktion ist differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Für $x = -4$ ist $f(x)$ nicht differenzierbar (senkrechte Tangente).



Bei der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \begin{cases} -20(16 - x^2)^{-\frac{3}{2}} & \text{für} \quad -4 < x \le 0 \\ -\frac{5}{16} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

haben $g''(0) = -\frac{20}{48}$ und $h''(0) = -\frac{5}{16}$ denselben Wert, also beide Funktionen haben dieselbe Rechtskrümmung.



Insgesamt sieht man, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig, und zweimal differenzierbar ist. An der Stelle $x = 0$ hat die Funktionen einen Hochpunkt.

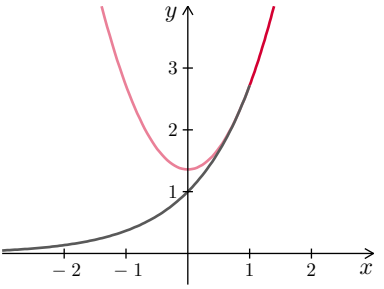
Lösung 8.19

a) Die Konstanten a_0, a_1 und a_2 bestimmt man aus den Werten des linken Teils der Funktion $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ und ihrer Ableitungen

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x, \quad f_1'(x) = \mathrm{e}^x, \quad f_1''(x) = \mathrm{e}^x.$$

Wir benötigen die Werte an der Stelle $x = 1$

$$f_1(1) = f_1'(1) = f_1''(1) = \mathrm{e}.$$

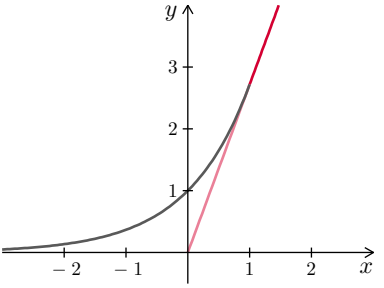


Auch vom rechten Teil der Funktion

$$f_2(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

benötigen wir den Funktionswert und die Werte der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x = 1$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= a_1 + 2\,a_2\,x \\ f_2''(x) &= 2\,a_2 \end{aligned}$$

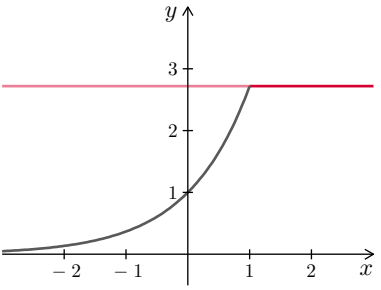


Insgesamt ergibt sich dadurch ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & \mathrm{e}, \\ & & a_1 & + & 2\,a_2 & = & \mathrm{e}, \\ & & & & 2\,a_2 & = & \mathrm{e}. \end{array}$$

Aufgrund der Dreiecksform ist das Gleichungssystem einfach lösbar mit

$$a_2 = \frac{\mathrm{e}}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$



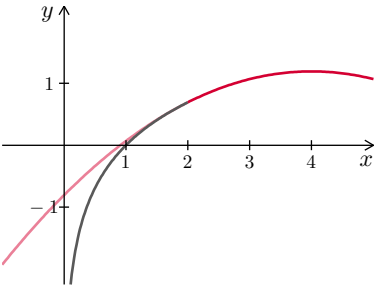
Die gesuchte Parabel ist $f_2(x) = \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{\mathrm{e}}{2}x^2$.

b) Die Konstanten a_0, a_1 und a_2 bestimmt man aus den Werten des linken Teils der Funktion $f_1(x) = \ln x$ und ihrer Ableitungen

$$f_1(x) = \ln x \quad f_1'(x) = \frac{1}{x} \quad f_1''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Wir benötigen die Werte an der Stelle $x = 2$

$$f_1(2) = \ln 2, \quad f_1'(2) = \frac{1}{2}, \quad f_1''(2) = -\frac{1}{4}.$$

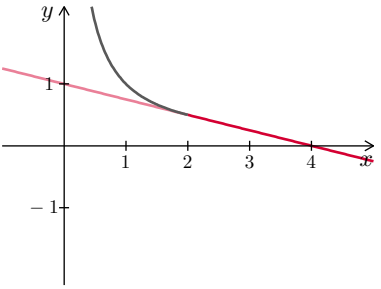


Auch vom rechten Teil der Funktion

$$f_2(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

benötigen wir den Funktionswert und die Werte der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x = 2$

$$\begin{array}{rcl} f_2'(x) & = & a_1 + 2\,a_2\,x \\ f_2''(x) & = & 2\,a_2 \end{array}$$

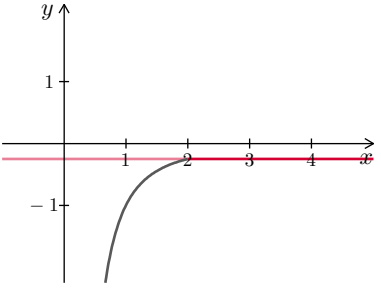


Insgesamt ergibt sich dadurch ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_0 & + & 2\,a_1 & + & 4\,a_2 & = & \ln 2, \\ & & a_1 & + & 4\,a_2 & = & \frac{1}{2}, \\ & & & & 2\,a_2 & = & -\frac{1}{4}. \end{array}$$

Aufgrund der Dreiecksform ist das Gleichungssystem einfach lösbar mit

$$a_2 = -\frac{1}{8}, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = \ln 2 - \frac{3}{2}.$$



Die gesuchte Parabel ist $f_2(x) = \ln 2 - \frac{3}{2} + x - \frac{1}{8}x^2$.

Lösung 8.20

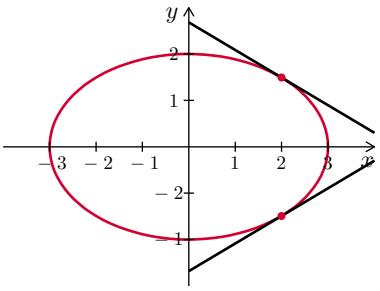
Durch Einsetzen der Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(3\,|\,0)$ in die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergibt sich $a = 3$ und $b = 2$. Eine Lösungsmöglichkeit wäre nun die Gleichung nach y aufzulösen

$$y = f(x) = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}, \quad f'(x) = \ldots$$

und dann die Tangente mithilfe der Ableitung zu berechnen.



Diesen Weg verfolgen wir aber nicht weiter, da die Lösungsmöglichkeit durch implizites Differenzieren der Gleichung

$$\frac{2x}{9} + \frac{2yy'(x)}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \frac{-4x}{9y}$$

eleganter ist. Wir müssen nun nur noch den passenden y-Werte zum x-Wert 2 bestimmen

$$\frac{2^2}{9} + \frac{R_y^2}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad R_y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

Es gibt also zwei passende Punkte. Die Steigung der Tangente erhalten wir aus der Formel $y'(x) = \frac{-4x}{9y}$

$$R_1(\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\,|\,1) : y'(\tfrac{2}{3}\sqrt{5}) = -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \quad R_2(-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\,|\,1) : y'(-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{4}{15}\sqrt{5}.$$

Die Gleichungen der Tangenten lauten

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{5} \pm \frac{4}{15}\sqrt{5}(x - 2).$$

Lösung 8.21

a) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{x}$ ist aufgrund von $\ln 1 = 0$ vom Typ $\frac{0}{0}$, somit lässt sich die Regel von Bernoulli de L'Hospital anwenden. Für den Grenzwert der Ableitungen gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{(2x+1)}}{1} = 2$. Somit ist hat auch der gesuchte Grenzwert denselben Wert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{x} = 2$.

b) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ ist aufgrund von $\tan 0 = 0$ vom Typ $\frac{0}{0}$, somit lässt sich die Regel von Bernoulli de L'Hospital anwenden. Für den Grenzwert der Ableitungen gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\tan^2 x}{1} = 1$. Somit ist hat auch der gesuchte Grenzwert denselben Wert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

c) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$ ist aufgrund von $\arctan 0 = 0$ vom Typ $\dfrac{0}{0}$, somit lässt sich die Regel von Bernoulli de L'Hospital anwenden. Für den Grenzwert der Ableitungen gilt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$. Somit ist hat auch der gesuchte Grenzwert denselben Wert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$.

Lösung 8.22

a) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert und stetig, denn der Nenner wird niemals null. Die erste Ableitung ist

$$f'(t) = 48\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(3+2\mathrm{e}^{-t})^2}.$$

Somit ist die Funktion für alle reellen Zahlen differenzierbar.

b) Waagrechte Asymptoten sind die Geraden $y = 4$ und $y = -4$.

$$\lim_{t\to\infty} 4\,\frac{3-2\mathrm{e}^{-t}}{3+2\mathrm{e}^{-t}} = 4, \qquad \lim_{t\to-\infty} 4\,\frac{3-2\mathrm{e}^{-t}}{3+2\mathrm{e}^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} 4\,\frac{3\mathrm{e}^{t}-2}{3\mathrm{e}^{t}+2} = -4.$$

c) Die Nullstellen bestimmt man aus

$$3 = 2\mathrm{e}^{-t} \Longrightarrow \ln\frac{3}{2} = -t \Longrightarrow N(\ln 2 - \ln 3\,|\,0).$$

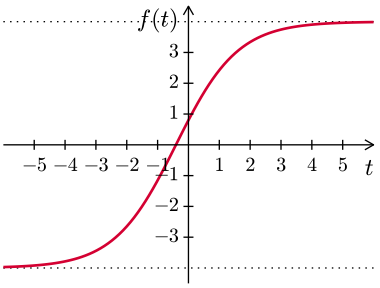
Die erste Ableitung wird niemals null, es gibt also keine Extremwerte. Aus der zweiten Ableitung

$$f''(t) = 48\,\frac{\mathrm{e}^{-t}(2\mathrm{e}^{-t}-3)}{(3+2\mathrm{e}^{-t})^3}$$

erkennt man, dass sie Nullstelle $N(\ln 2 - \ln 3\,|\,0)$ gleichzeitig der einzige Wendepunkt ist (Wechsel von Linkskrümmung nach Rechtskrümmung).

d) Die Funktion f ist streng monoton wachsend, da die erste Ableitung immer positiv ist. Sie ist zwischen den waagrechten Asymptoten nach oben und nach unten beschränkt.

e) Die Wertemenge ist $(-4, 4)$.



Lösung 8.23

a) Die Funktion f ist ungerade, also punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$\sqrt{(-x)} - (-x) = \sqrt{-x} + x = -\left(-\sqrt{-x} - x\right)$$

b) Die Funktion f ist bei $x = 0$ stetig, denn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind gleich und beide Grenzwerte stimmen mit dem Funktionswert $f(0) = 0$ überein:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\sqrt{-0} - 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{0} - 0 = 0$$

Für die erste Ableitung gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht differenzierbar. Dort besitzt das Schaubild der Funktion eine senkrechte Tangente.

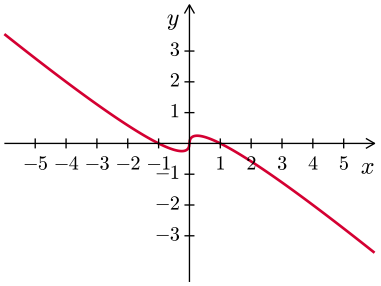
c) Die Funktion f besitzt die Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Setzt man für $x \neq 0$ die erste Ableitung null, so ergibt sich

$$\frac{1}{4\,|x|} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{4,5} = \pm\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad T\left(-\frac{1}{4}\,\middle|\,-\frac{3}{4}\right) \,,\, H\left(\frac{1}{4}\,\middle|\,\frac{3}{4}\right)$$

Die Art der Extrema erkennt man an den Vorzeichenwechseln von f'.
Für die zweite Ableitung gilt

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}} & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{-x^3}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gibt es keine Nullstelle von f''. Allerdings besitzt die Funktion laut Definition bei $(0|0)$ einen Wendepunkt.



d) Alle Eigenschaften der Funktion f sind im Schaubild erkennbar.

Lösung 8.24

a) Die Funktion ist, wie alle Polynome, für alle reellen Zahlen definiert und überall stetig und differenzierbar.

b) Durch einsetzen von $x = 1$ ergibt sich $f(1) = \frac{1}{5} - \frac{7}{10} - 2 + \frac{5}{2} = 0$. Die restlichen Nullstellen findet man durch Polynomdivision, die einfacher geht, wenn man vorher den Faktor $\frac{1}{10}$ ausklammert

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = \frac{1}{10}\left(2x^3 - 7x^2 - 20x + 25\right)$$

Die Polynomdivision mit dem Linearfaktor $x-1$ ergibt

$$\begin{array}{rl}
\left(\quad 2x^3-7x^2-20x+25\right) : \left(x-1\right) = 2x^2-5x-25 \\
\underline{-2x^3+2x^2} \\
\quad -5x^2-20x \\
\quad \underline{5x^2\ \ -5x} \\
\quad\quad -25x+25 \\
\quad\quad \underline{25x-25} \\
\quad\quad\quad\ \ 0
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen ergeben sich aus

$$2\,x^2-5\,x-25=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{4}=5,-\frac{5}{2}.$$

c) Zur Berechnung der Hoch- und Tiefpunkte setzt man die erste Ableitung null

$$f'(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{5}x-2=0 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{6}=-1,\frac{10}{3}.$$

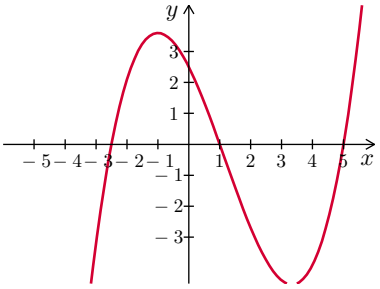
Mit der zweiten Ableitung kann man entscheiden, welche Art von Extremwert vorliegt

$$f''(x)=\frac{6}{5}x-\frac{7}{5} \Longrightarrow f''(-1)=-\frac{6}{5}-\frac{7}{5}<0, f''\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{6\cdot 10}{5\cdot 3}-\frac{7}{5}=\frac{13}{5}>0.$$

An der Stelle $x=-1$ liegt also ein Hochpunkt vor und an der Stelle $x=\frac{10}{3}$ ein Tiefpunkt. Wendepunkte bestimmt man über die Nullstellen der zweiten Ableitung

$$f''(x)=\frac{6}{5}x-\frac{7}{5}=0 \Longrightarrow x=\frac{7}{6}.$$

Die Stelle $x=\frac{7}{6}$ liegt zwischen dem Hochpunkt und dem Tiefpunkt, entsprechend wechselt die Kurve dort von Rechtskrümmung auf Linkskrümmung.



d) Die Funktion ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Von $-\infty$ bis zum Hochpunkt und vom Tiefpunkt bis ∞ ist die Funktion streng monoton wachsend, dazwischen ist sie streng monoton fallend.

e) Die Wertemenge umfasst alle reellen Zahlen.

Lösung 8.25

Lösung 8.26

a) Für $t\geq 0$ und $A>0$ wird der Nenner niemals null. Somit ist die Funktion für alle $t\geq 0$ stetig. Die erste Ableitung

$$f'(t)=\frac{A(t+A)-At}{(t+A)^2}=\frac{A^2}{(t+A)^2}$$

ist auch für alle $t\geq 0$ definiert. Somit ist die Funktion auch für alle $t\geq 0$ differenzierbar.

b) Die einzige Nullstelle ist $t = 0$. Extremwerte besitzt die Funktion keine, denn die erste Ableitung wird niemals null. Für Wendepunkte untersucht man die zweite Ableitung

$$f''(t) = \frac{-2A^2}{(t+A)^3}.$$

Auch die zweite Ableitung wird niemals null. Es gibt keine Wendepunkte und die Funktion ist eine Rechtskurve.

c) Den Sättigungswert ermittelt man aus dem Grenzwert

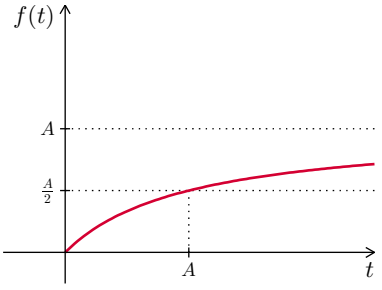
$$\lim_{t\to\infty} \frac{At}{t+A} = \lim_{t\to\infty} \frac{A}{1+\frac{A}{t}} = A.$$

d) Die erste Ableitung ist immer positiv, die Funktion ist also streng monoton wachsend und durch $f(0) = 0$ nach unten und durch den Sättigungswert A nach oben beschränkt.

e) Die Gleichung

$$\frac{At}{t+A} = \frac{A}{2}$$

hat genau eine Lösung $t = A$.



f) $y = f(0) + f'(0)(t-0) = \frac{A^2}{A^2}t = t.$

g) Die Wertemenge ist $[0, A)$.

Lösung 8.27

a) Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen und im Nenner darf der Ausdruck nicht null werden. Somit ist $f(x)$ für $-4 < x < 4$ definiert. Da $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(0\,|\,0)$ ist untersuchen wir $f(x)$ nur für $x \geq 0$. Den Rand der Definitionsmenge betrachten wir durch Grenzwerte

$$\lim_{x\to -4} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -\infty, \lim_{x\to 4} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \infty.$$

Die Funktion f besitzt für $x = \pm 4$ senkrechte Asymptoten und die Wertemenge $(-\infty, \infty)$.

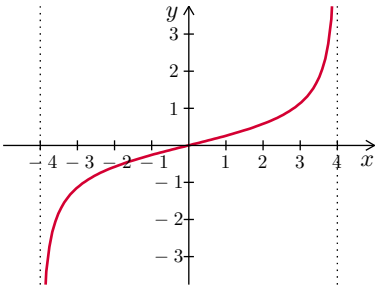
b) Die Funktion ist auf der ganzen Definitionsmenge stetig und differenzierbar mit der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{16}{(16-x^2)^{3/2}}$$

c) Die einzige Nullstelle ist $(0\,|\,0)$. Die erste Ableitung ist immer positiv, also $f(x)$ ist streng monoton wachsend und hat keine Extremwerte. Aus der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{48x}{(16-x^2)^{5/2}}$$

erkennt man den Wendepunkt $W(0\,|\,0)$. Dort findet ein Wechsel von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung statt.



d) Die Funktion ist weder nach unten noch nach oben beschränkt und streng monoton wachsend.
e) Die Wertemenge ist ganz $\mathbb{R}$.

Lösung 8.28
Ordner

Lösung 8.29
Wir Lösen das Problem mit dem Differenzial von W. Näherungsweise gilt für den relativen Fehler

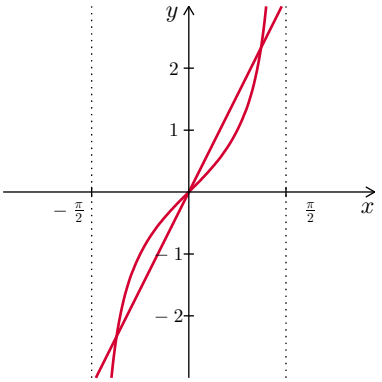
$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{W'}{W}\Delta d.$$

Die Ableitung von W nach d ergibt

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{3\,d^2}{d^3}\Delta d = 3\,\frac{\Delta d}{d}.$$

Der relative Fehler von d wirkt sich mit dem Faktor 3 auf den relativen Fehler von W aus. Somit ist höchstens eine Abweichung von $\frac{1}{3}\%$ des Durchmessers zulässig.

Lösung 8.30
Das Schaubilder der Funktion $f(x) = \tan x$ für x-Werte im Bereich von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ schneidet die Gerade $y = 2\,x$ genau drei mal.
Die erste Lösung ist $x_0 = 0$. Die beiden anderen Lösungen liegen symmetrisch zum Ursprung. Es genügt also einen Schnittpunkt zu berechnen. Aus der Skizze erkennt man, dass man das Newton-Verfahren beispielsweise mit $x = 1$ starten kann.



$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{2x_0 - \tan x_0}{2 - 1 - \tan^2 x_0} \\ &= 1 - \frac{2 - \tan 1}{1 - \tan^2 1} \approx 1.31047803. \end{aligned}$$

Nach ein paar Schritten ergibt sich

$$x_6 = 1.16556118, \quad x_7 = 1.16556118.$$

Lösung 8.31
Das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 2$ für die Gleichung

$$f(x) = x^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2\,x$$

ergibt den ersten Näherungswert

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2\,x_0} = 2 - \frac{4-3}{4} = \frac{7}{4}.$$

und den zweiten Näherungswert

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 3}{2\,x_1} = \frac{7}{4} - \frac{\frac{49}{16} - 3}{\frac{7}{2}} = \frac{7}{4} - \frac{\frac{49}{8} - \frac{48}{8}}{7} = \frac{97}{56}.$$

Lösung 8.32

Die Oberfläche O der Dose besteht aus einem Rechteck und dem kreisförmigen Deckel und Boden. Die Höhe des Rechtecks entspricht der Höhe h der Dose und die Länge entspricht dem Umfang der Dose $2\,\pi\,r$. Dabei bezeichnet r den Radius der Dose. Deckel und Boden haben jeweils eine Fläche von $\pi\,r^2$. Insgesamt gilt

$$O(h,r) = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2.$$

Bei einem konstanten Volumen hängen die Höhe h und der Radius r voneinander ab. Das Volumen V der Dose berechnet sich aus dem Produkt von Grundfläche $\pi\,r^2$ und Höhe h. Somit gilt

$$V = \pi\,r^2\,h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi\,r^2}$$

und die Oberfläche hängt nur noch von r ab

$$O(r) = 2\,\pi\,r\,\frac{V}{\pi\,r^2} + 2\,\pi\,r^2 = \frac{2\,V}{r} + 2\,\pi\,r^2.$$

Bei einem Volumen $V = 0.5$ gilt

$$O(r) = \frac{1}{r} + 2\,\pi\,r^2 \quad \Longrightarrow \quad O'(r) = \frac{-1}{r^2} + 4\,\pi\,r.$$

Einen Extremwert finden wir aus der Bedingung

$$O'(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r^2} = 4\,\pi\,r \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4\,\pi} = r^3 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\,\pi}} \approx 0.43.$$

Aus dem Radius ergibt sich die Höhe

$$h = \frac{V}{\pi\,r^2} \approx \frac{0.5}{\pi\,0.43^2} \approx 0.86$$

Ein Physiker wäre erschüttert, über die Art wie wir bisher ohne Einheiten gerechnet haben. Da wir das Volumen in Liter angegeben haben ist die Einheit für den Radius und die Höhe dm. Der Durchmesser und Höhe der Dose beträgt also ungefähr 8.6cm.

Lösung 8.33

Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$y^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{(l-x)^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (l-x)^2}.$$

Somit können wir die Gesamtlänge L in Abhängigkeit von x darstellen

$$L(x) = 4\,y + x = 2\,\sqrt{b^2 + (l-x)^2} + x.$$

Einen Extremwert finden wir mit der Ableitung

$$L'(x) = \frac{-2(l-x)}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} + 1.$$

Die Bedingung $L'(x)$ liefert

$$\frac{2(l-x)}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 1 \Longrightarrow 4(l-x)^2 = b^2 + (l-x)^2 \Longrightarrow 3(l-x)^2 = b^2 \Longrightarrow l - x = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

x muss auf jeden Fall kleiner als l sein und damit erhalten wir nur einen möglichen Extremwert

$$x = l - \frac{b}{\sqrt{3}} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Longrightarrow L(x) = 4\,y + x = \frac{4b}{\sqrt{3}} + l - \frac{b}{\sqrt{3}} = l + \sqrt{3}\,b \approx 259.$$

Für $x = 0$ hat die Verbindung entlang der beiden Diagonalen die Gesamtlänge

$$L(0) = 2\sqrt{b^2 + l^2} \approx 288$$

und für $x = l$ hat die Verbindung die Gesamtlänge

$$L(l) = 2\,b + l = 280.$$

Somit sind wir auch ohne Berechnung der zweiten Ableitung sicher, dass es sich bei dem Extremwert um ein Minimum handelt.

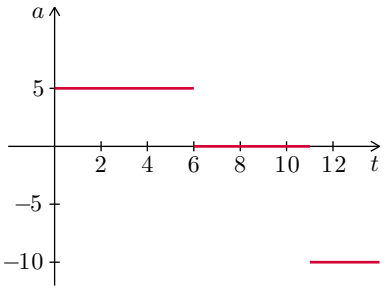
Lösung 8.34

a) Für die Strecke, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung gilt

$$s(t) = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a_0\,t^2 \quad , \quad v(t) = v_0 + a_0\,t \quad , \quad a(t) = a_0$$

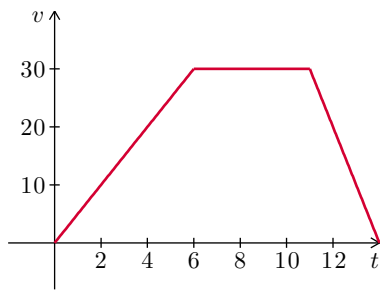
b) Für die erste Phase werden 6 s benötigt. Die zweite Phase dauert $\frac{150}{30}$ s $= 5$ s. Für die dritte Phase werden $\frac{30}{10}$ s $= 3$ s benötigt.
Damit ergibt sich für die Beschleunigung

$$a(t) = \begin{cases} 5 & \text{für} \quad 0 \le t \le 6 \\ 0 & \text{für} \quad 6 \le t \le 11 \\ -10 & \text{für} \quad 11 \le t \le 14 \end{cases}$$



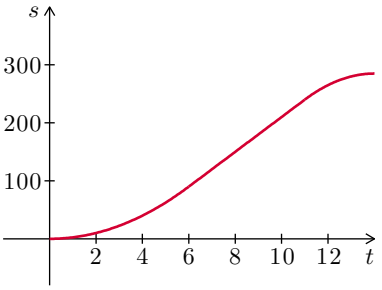
und für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \begin{cases} 5\,t & \text{für} \quad 0 \le t \le 6 \\ 30 & \text{für} \quad 6 \le t \le 11 \\ 30 - 10\,(t - 11) & \text{für} \quad 11 \le t \le 14 \end{cases}$$



und für die Strecke

$$s(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}\,t^2 & 0 \le t \le 6 \\ 90 + 30\,(t-6) & 6 \le t \le 11 \\ 240 + 30\,(t-11) - 5\,(t-11)^2 & 11 \le t \le 14 \end{cases}$$



c) Die Gesamtzeit beträgt $14\,\mathrm{s}$ und der Gesamtweg $s(14) = 285\,\mathrm{m}$.

Lösung 8.35

1. Für die Gerade durch die ersten beiden Punkte gilt

   $$g(x) = \frac{200}{3000}\,x = \frac{1}{15}\,x \quad .$$

   Für die Parabel mit dem Ansatz

   $$p(x) = ax^2 + bx + c$$

   gelten die Gleichungen

   $$9\cdot 10^6 a + 3000b + c = 200 \quad , \quad 25\cdot 10^6 a + 5000b + c = 300 \quad , \quad 36\cdot 10^6 a + 6000b + c = 250 \quad .$$

   Löst man diese nach c auf und setzt die ersten beiden bzw. die erste und dritte gleich, so ergibt sich

   $$3000b = 150 - 24\cdot 10^6 a \quad , \quad 3000b = 50 - 27\cdot 10^6 a \quad .$$

   Durch erneutes Gleichsetzen und anschließendes Einsetzen folgt

   $$a = -\frac{1}{30000} \quad , \quad b = \frac{19}{60} \quad , \quad c = -450 \quad .$$

   Die Kurve hat an der Nahtstelle einen Knick.
   BILD !!!

2. Für die Gerade durch die ersten beiden Punkte gilt

   $$g(x) = \frac{200}{3000}\,x = \frac{1}{15}\,x \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{15} \quad .$$

   Für die Parabel mit dem Ansatz

   $$p(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad p'(x) = 2ax + b$$

   gelten die Gleichungen

   $$2a\cdot 3000 + b = \frac{1}{15} \quad , \quad 2a\cdot 5000 + b = 0 \quad .$$

Löst man diese nach b auf und setzt sie gleich, so ergibt sich

$$\frac{1}{15} - 6000a = -10000a \quad .$$

Durch Auflösen nach a und anschließendes Einsetzen folgt

$$a = -\frac{1}{60000} \quad , \quad b = \frac{1}{6} \quad , \quad c = -150 \quad .$$

Die Kurve hat an der Nahtstelle nun keinen Knick mehr.
BILD !!!

9 Integralrechnung

Lösung 9.1

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist

$$A'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

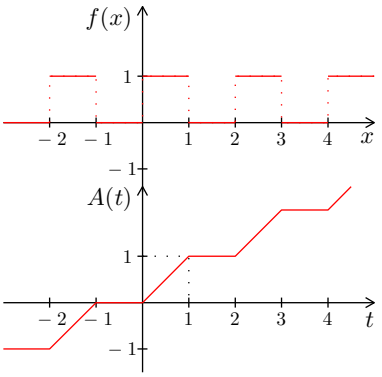
Also ist $t = \pm 1$.

Lösung 9.2

Die Integralfunktion

$$A(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

beschreibt den Zuwachs der Fläche angefangen bei 0 zwischen $f(x)$ und der x-Achse.
Die Fläche wächst linear an, bis sie den Wert 1 erreicht hat. Dann hat die Funktion $f(x)$ für x Werte zwischen 1 und 2 den Wert 0. In diesem Bereich bleibt der Flächeninhalt unverändert. Danach wächst der Flächeninhalt wieder linear auf den Wert 2 an. Zwischen 3 und 4 bleibt er wieder unverändert, usw.



Lösung 9.3

Stammfunktion

$$F(x) = \int \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + C$$

Bedingung $F(\frac{1}{4}) = \mathrm{e}$

$$\frac{1}{4}\mathrm{e} + C = \mathrm{e} \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{3}{4}\mathrm{e}.$$

Lösung 9.4

$$\int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^b u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \left.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right|_0^b = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$$

Auflösen nach b

$$\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad b = \frac{3}{2}^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \approx 1.3104$$

Lösung 9.5

Unter dem Integral steht eine ungerade Funktion. Auf einem Intervall, das symmetrisch zu 0 ist, heben sich die positiven und negativen Funktionswerte bei der Berechnung des bestimmten Integrals gegenseitig auf. Somit hat das bestimmte Integral den Wert 0.

Lösung 9.6

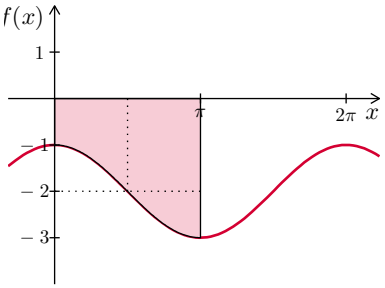
Die Fläche lässt sich mithilfe einer Stammfunktion ermitteln

$$\int_0^{\pi} \cos x - 2 \, \mathrm{d}x = [\sin x - 2x]_0^{\pi} = -2\pi.$$

Für die Zwischenstelle u erhalten wir damit die Bedingung

$$-2\pi = (\pi - 0)(\cos u - 2).$$

Also muss $\cos u = 0$ und damit $u = \dfrac{\pi}{2}$ sein. Anschaulich bedeutet das, dass die Fläche unter der Kurve genau so groß wie die Rechteckfläche mit der Grundseite $\pi - 0$ und der Höhe 2 ist.



Lösung 9.7

a) $\int 1 + x + x^2 \, \mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C..$

b) $\int \sin \pi x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} cos\pi x + C.$

c) $\int \frac{1}{2x-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln|2x - 1| + C.$

d) $\int \mathrm{e}^{3x+2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2} + C.$

e) $\int \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C.$

f) $\int \frac{1}{1+4x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \arctan 2x + C.$

Lösung 9.8

a) Substitution $u = 2t + 1$

$$\int_1^2 \sqrt{2t+1} \, \mathrm{d}t = \frac{5}{3}\sqrt{5} - \sqrt{3}$$

b) Substitution $u = 2x + 1$

$$\int_5^7 u^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[u^{\frac{1}{2}}\right]_5^7 = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

c) Vereinfachung

$$\int_0^1 \ln \sqrt{2u+1} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(2u+1) \, \mathrm{d}u$$

Substitution $x = 2u + 1$

$$\frac{1}{4}\int_1^3 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,(x \ln x - x)|_1^3 = \frac{3}{4}\ln(3) - \frac{1}{2}$$

Lösung 9.9

Substitution $u = \ln x$

$$\int_2^3 \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{xu}\,x\,\mathrm{d}u = \ln u\big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$$

Lösung 9.10

a) Substitution $u = 1 - \sin\omega$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\sqrt{1-\sin\omega}\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{-\cos\omega}.$$

Nach dem Kürzen enthält das Integral kein ω mehr

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\sqrt{1-\sin\omega}\,\mathrm{d}\omega = -\int_a^b \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{3}\,(u)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^b = -\frac{2}{3}\,(1-\sin\omega)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b) Substitution $u = 1 + \cos\alpha$. Nach dem Kürzen enthält das Integral kein α mehr

$$\int_0^{\pi} (1+\cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \int_2^0 u\sin\alpha\,\frac{\mathrm{d}u}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{2}u^2\Big|_2^0 = 2.$$

Lösung 9.11

1. partielle Integration

$$\int \underbrace{(1+t+t^2)}_{f(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{g'(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{(1+t+t^2)}_{f(t)}\cdot\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{g(t)} - \int \underbrace{(1+2t)}_{f'(t)}\cdot\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

2. partielle Integration

$$\int \underbrace{(1+2t)}_{f(t)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{g'(t)}\,\mathrm{d}t = \underbrace{(1+2t)}_{f(t)}\cdot\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{g(t)} - \int \underbrace{(2)}_{f'(t)}\cdot\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

Insgesamt

$$\int_0^1 (1+t+t^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\left(4+3t+t^2\right)\Big|_0^1 = -8\,e^{-1}+4.$$

Lösung 9.12

a) Das Standardverfahren zur Berechnung von

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

ist eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Bei diesem Integral kommt man jedoch mit der Substitution

$$u = x^2 - 1, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$$

schneller zum Ziel. Es ist

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x^2-1| + C\,.$$

b) Das Integral

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

lösen wir mithilfe einer Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - B}{(x-1)(x+1)}\,.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} A & - & B & = & 1 \\ A & + & B & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

ergibt

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}\,.$$

c) Bei dem Integral

$$\int \frac{x^4}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

ist der Integrand eine unecht gebrochenrationale Funktion, die wir durch Polynomdivision zerlegen:

$$\begin{array}{l} \left(x^4\right) : \left(x^2+3\right) = x^2 - 3 + \dfrac{9}{x^2+3} \\ \underline{-x^4 - 3x^2} \\ \qquad -3x^2 \\ \qquad \underline{3x^2 + 9} \\ \qquad\qquad 9 \end{array}$$

Den Divisionsrest integrieren wir mithilfe der Formel

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

Mit $a = \sqrt{3}$ ergibt sich insgesamt

$$\int \frac{x^4}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - 3 + \frac{9}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

d) Bei dem Integral

$$\int \frac{6}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$$

verwenden wir auch Partialbruchzerlegung. Dazu müssen wir zuerst die Nullstellen des Nenners bestimmen. Die Nullstelle $x_1 = 1$ ist offensichtlich. Durch Polynomdivision ergibt sich:

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 \qquad\qquad -1\big) : \big(x-1\big) = x^2+x+1 \\
\underline{-x^3+x^2} \\
\qquad\quad x^2 \\
\qquad\;\underline{-x^2+x} \\
\qquad\qquad\quad x-1 \\
\qquad\qquad\;\underline{-x+1} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das Polynom x^2+x+1 hat keine reelle Nullstelle. Somit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{6}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}\,.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc}
A & & & - & C & = & 6 \\
A & - & B & + & C & = & 0 \\
A & + & B & & & = & 0
\end{array} \quad\Rightarrow\quad A=2, B=-2, C=-4\,.$$

ergibt

$$\int \frac{6}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Das zweite Integral zerlegen wir trickreich in

$$\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dadurch steht ein Integral, bei dem im Zähler die Ableitung des Nenners steht und wir können das Integral mit der Substitution

$$u = x^2+x+1, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x+1$$

lösen

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2x+1} = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln(x^2+x+1)\,.$$

Das noch fehlende Teilintegral lösen wir mit Formel

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

Dazu formen wir wie folgt um

$$\int \frac{3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int \frac{6}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x-1) - \ln(x^2+x+1) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

e) Bei dem Integral

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

lautet der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx^2 + Dx^3}{x^4+x^2}\,.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & B & & & = & 1 \\ A & & & & & = & 1 \\ & & B & + & C & = & 0 \\ A & & & + & D & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = 1, C = -1, D = -1$$

ergibt

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Die beiden ersten Integrale sind einfach zu bestimmen

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{x} + C\,.$$

Das letzte Integral zerlegen wir wieder so, dass wir einen Teil erhalten, bei dem im Zähler die Ableitung des Nenners steht

$$-\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C\,.$$

f) Bei diesem Problem ist zunächst zu beachten, dass der Nenner ein vollständiges Quadrat ist, das keine reellen Nullstellen besitzt:

$$I = \int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Funktion im Integral lässt sich deshalb durch eine Partialbruchzerlegung nicht weiter vereinfachen. Deshalb zerlegen wir den Zähler trickreich in einzelne Summanden, für die wir jeweils Stammfunktionen ermitteln können:

$$I = \int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x^2+2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x}_{I_2}\,.$$

Beim ersten Integral entspricht der Zähler der Ableitung des Nenners, wodurch sich das Integral lösen lässt:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{4\,x^3 + 4\,x}{x^4 + 2\,x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\,\ln(x^4 + 2\,x^2 + 1) + C_1\,.$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch die Rechenregeln des Logarithmus

$$I_1 = \ln(x^4 + 2\,x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C_1 = \ln(x^2 + 1) + C_1\,.$$

Das zweite Integral zerlegen wir nochmals trickreich in eine Summe

$$I_2 = \int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 2\,x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x = \underbrace{\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x}_{I_3} + \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x}_{I_4}\,.$$

Das Integral I_3 ist einfach zu bestimmen:

$$I_3 = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x = \arctan x + C_3\,.$$

Das Integral I_4 ist wesentlich kniffliger zu lösen. Eine weitere trickreiche Zerlegung ergibt:

$$I_4 = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \underbrace{\int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x}_{\arctan x + C_4} - \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x}_{I_5}\,.$$

Das Integral I_5 lösen wir durch partielle Integration:

$$I_5 = \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2} \int \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{\frac{2\,x}{(x^2 + 1)^2}}_{g'(x)}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\,x\,g(x) - \frac{1}{2} \int 1 \cdot g(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Allerdings benötigen wir dazu $g(x)$, also eine Stammfunktion von $g'(x)$:

$$g(x) = \int \frac{2\,x}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{x^2 + 1} + \tilde{C}\,.$$

Mit diesem Zwischenergebnis ergibt sich

$$I_5 = \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\,\arctan x + C_5\,.$$

Fasst man alle Teile zusammen

$$I = I_1 + I_2 = \ln(x^2 + 1) + I_3 + I_4 = \ln(x^2 + 1) + 2\,\arctan x - I_5\,,$$

so erhält man das Ergebnis

$$\int \frac{2\,x^3 + x^2 + 2\,x + 2}{x^4 + 2\,x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x = \ln(x^2 + 1) + \frac{3}{2}\,\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2 + 1} + C\,.$$

Alternativ kann man folgendermaßen rechnen:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan x + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan x + \int \frac{1+x^2+1-x^2}{2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

An zwei Stellen wird dabei die 1 trickreich ergänzt und zum Schluss wird die Quotientenregel rückwärts angewendet.

Lösung 9.13

Die Substitution $u = \mathrm{e}^x$ ergibt

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{u^3}{u^2-2u+1}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Polynomdivision und Partialbruchzerlegung liefern

$$\frac{u^2}{u^2-2u+1} = 1 + \frac{2}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}$$

Dadurch erhalten wir

$$\int \frac{u^2}{u^2-2u+1}\,\mathrm{d}u = \int 1 + \frac{2}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\,\mathrm{d}u = u + 2\ln(u-1) - \frac{1}{u-1} + C$$

Durch einsetzen der Grenzen folgt

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 + 2\ln(\mathrm{e}^2-1) - \frac{1}{\mathrm{e}^2-1} - \mathrm{e} - 2\ln(\mathrm{e}-1) + \frac{1}{\mathrm{e}-1}$$

Lösung 9.14

a) Das uneigentliche Integral lässt sich mithilfe einer Stammfunktion durch Grenzwertbildung bestimmen

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_a^0 = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{2}.$$

b) Das uneigentliche Integral lässt sich mithilfe einer Stammfunktion durch Grenzwertbildung bestimmen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to1} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to1}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-b}{b+1}\right) = -\infty$$

c) Mit der Substitution $\sqrt{x}-1=u$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\frac{1}{u}\,2(u+1)\,\mathrm{d}u = \lim_{b\to0} 2u+2\ln(-u)\Big|_{-1}^{b} = -\infty$$

Lösung 9.15

Die x-Koordinate des Schnittpunkts bestimmt man aus der Gleichung

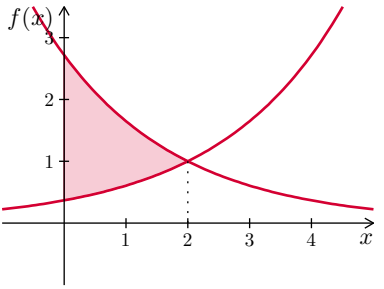
$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1} = \mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}}.$$

Diese Gleichung lässt sich durch den Logarithmus lösen

$$\frac{x}{2}-1 = 1-\frac{x}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = 2.$$

Die Fläche ergibt sich aus

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\,\mathrm{d}x = -4+\frac{2}{\mathrm{e}}+2\,\mathrm{e}.$$



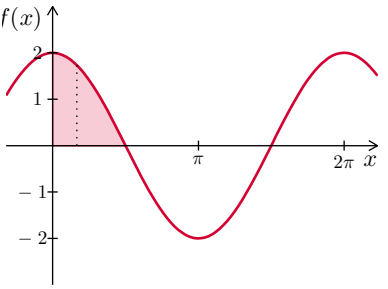
Lösung 9.16

Wir setzen die gesamte Fläche gleich mit dem zweifachen der halben Fläche

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\mathrm{d}\,x = 2\int_0^b 2\cos(x)\mathrm{d}\,x$$

Die gesuchte Obergrenze b ergibt sich damit zu

$$2\sin\frac{\pi}{2} = 4\sin b \quad\Longrightarrow\quad b = \frac{\pi}{6}.$$



Lösung 9.17

$$V_x = \pi \int_0^a \left(\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^a x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-a^2}\right).$$

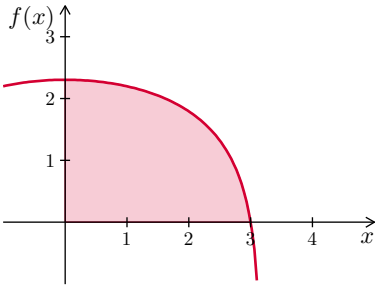
Lösung 9.18

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte bestimmt man aus der Gleichung

$$\ln\left(10 - x^2\right) = 0.$$

Daraus folgt

$$10 - x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3.$$



Die Fläche bestimmen wir mithilfe einer Stammfunktion

$$A = \int_0^3 \ln\left(10 - x^2\right) \mathrm{d}x.$$

Dazu formen wir den Integranden mit der dritten binomischen Formel um

$$A = \int_0^3 \ln\left((\sqrt{10} - x)(\sqrt{10} + x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^3 \ln\left(\sqrt{10} - x\right) + \ln\left(\sqrt{10} + x\right) \mathrm{d}x.$$

Die Summanden können wir mit der Formel

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\left(\ln x - 1\right) + C$$

einzeln integrieren und erhalten

$$A = -(\sqrt{10} - x)\ln\left(\sqrt{10} - x\right) + (\sqrt{10} - x) + (\sqrt{10} + x)\ln\left(\sqrt{10} + x\right) - (\sqrt{10} + x)\Big|_0^3.$$

Durch Einsetzen der Grenzen ergibt sich

$$A = -6 + \sqrt{10}\ln(3\sqrt{10} + 10) - \sqrt{10}\ln(10 - 3\sqrt{10}) \approx 5.50086523.$$

Für das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation von A um die y-Achse entsteht, bestimmen wir die Umkehrfunktion

$$y = \ln(10 - x^2) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^y = 10 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 10 - \mathrm{e}^y \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{10 - \mathrm{e}^y}.$$

Durch vertauschen von x und y ergibt sich die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{10 - \mathrm{e}^x}.$$

Das Volumen bestimmen wir durch Integration

$$V_y = \pi \int_0^{\ln 10} \left(10 - \mathrm{e}^x\right) \mathrm{d}x = \pi\left[10x - \mathrm{e}^x\right]_0^{\ln 10} = \pi(10\ln 10 - 9) \approx 44.06351025.$$

Lösung 9.19

Die Fläche erhalten wir aus dem uneigentlichen Integral mithilfe eines Grenzwerts

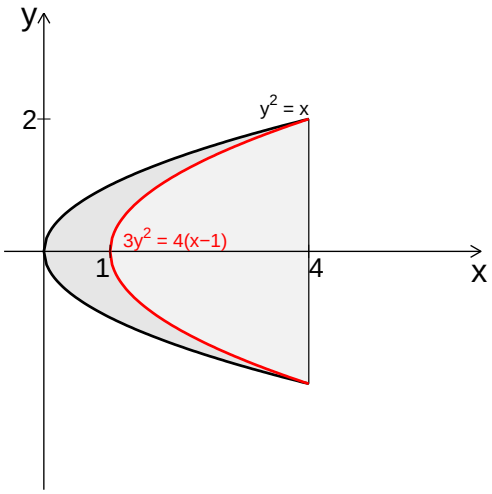
$$A = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln x\big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Das Volumen ergibt sich auch aus einem uneigentlichen Integral

$$V_x = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \lim_{b\to\infty} \left(-x^{-1}\right)\big|_1^b = \pi \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi.$$

Es ergibt sich ein verblüffendes Fazit: Der Flächeninhalt ist unendlich groß, aber das Rotationsvolumen ist endlich!

Lösung 9.20



a) Die Schaubilder der beiden Funktionen sind bezogen auf y als Variable zwei Parabeln

$$x = y^2, \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 1.$$

Die gesuchte Fläche ist die Differenz aus zwei Flächen

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - 2\int_1^4 \sqrt{\frac{4}{3}(x-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}(x-1)\right)^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

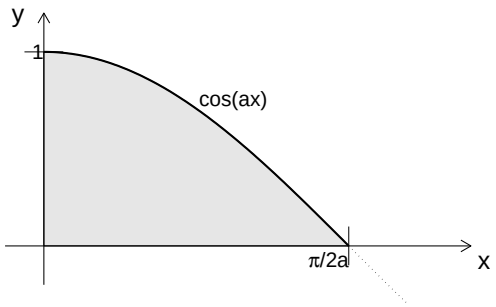
b) Man kann das Volumen auch aus der Differenz zweier Volumina berechnen

$$\begin{aligned} V_x &= \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_1^4 \left(\sqrt{\frac{4}{3}(x-1)}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 8\pi - \pi\left[\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x\right]_1^4 = \pi(8 - \frac{32}{3} + \frac{16}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}) = 2\pi, \\ V_y &= 2\pi\int_0^2 \left(\frac{3}{4}y^2 + 1\right)^2 \mathrm{d}y - 2\pi\int_0^2 \left(y^2\right)^2 \mathrm{d}y \\ &= 2\pi\left[\frac{9}{80}y^5 + \frac{1}{2}y^3 + y\right]_0^2 - 2\pi\cdot\frac{32}{5} = \pi(\frac{36}{5} + 8 + 4 - \frac{64}{5}) = \frac{32}{5}\pi. \end{aligned}$$

c) Die y-Koordinate des Schwerpunktes ist 0, da die Fläche symmetrisch zur x-Achse ist. Die x-Koordinate berechnet man mit den Ergebnissen aus a) und b) am einfachsten mit der 2. Guldinschen Regel

$$S_x = \frac{V_y}{2\pi \cdot A} = \frac{32\pi \cdot 3}{2\pi \cdot 5 \cdot 8} = \frac{6}{5}.$$

Lösung 9.21



a) Die erste Nullstelle von $\cos(ax)$ liegt bei $\frac{\pi}{2a}$, deshalb gilt

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax)\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{1}{a}.$$

b) Bei der Rotation um die x-Achse entsteht das Volumen

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (\cos(ax))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax)\right]_0^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{\pi^2}{4a}. \end{aligned}$$

Bei der Rotation um die y-Achse benötigt man x als Funktion von y

$$y = \cos(ax) \Longrightarrow ax = \arccos y \Longrightarrow x = \frac{1}{a}\arccos y,$$

damit ergibt sich

$$V_y = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{a}\arccos y\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{a^2}\int_0^1 \arccos^2 y\,\mathrm{d}y.$$

Dieses Integral ist (auch mit Formelsammlung) schwer zu knacken, deshalb brauchen wir eine andere Strategie. Wir berechnen zunächst die x-Koordinate des Schwerpunktes, siehe c) und verwenden dann die 2. Guldinsche Regel

$$V_y = 2\pi \cdot S_x \cdot A.$$

c) S_y berechnet man mit den Ergebnissen aus a) und b) am einfachsten mit der 2. Guldinschen Regel

$$S_y = \frac{V_x}{2\pi \cdot A} = \frac{a\pi^2}{2\pi \cdot 4a} = \frac{\pi}{8}.$$

Für S_x berechnen wir zunächst das Moment M_y

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(ax)+ax\sin(ax)}{a^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{\pi-2}{2a^2}$$

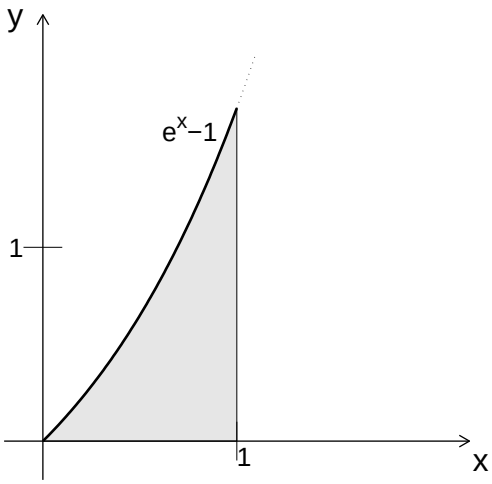
und damit

$$S_x = \frac{M_y}{A} = \frac{\pi-2}{2a}.$$

Nun kennen wir auch

$$V_y = 2\pi\cdot S_x\cdot A = 2\pi\cdot\frac{\pi-2}{2a}\frac{1}{a} = \frac{\pi(\pi-2)}{a^2}.$$

Lösung 9.22



a) Die Fläche berechnet man mit

$$A = \int_0^1 \mathrm{e}^x - 1\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x - x]_0^1 = \mathrm{e}-2.$$

b) Für die Schwerpunktskoordinaten berechnet man die Momente

$$M_y = \int_0^1 x\cdot(\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathrm{e}^x-1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + x\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+5}{4}.$$

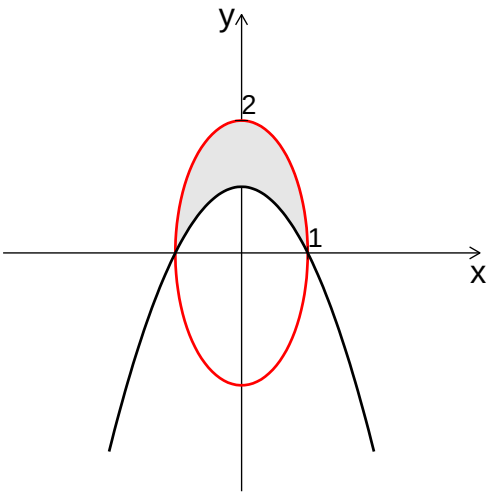
Damit erhalten wir die Schwerpunktskoordinaten

$$S_x = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{2(\mathrm{e}-2)}, \quad S_y = \frac{M_x}{A} = \frac{\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}+5}{4(\mathrm{e}-2)}.$$

c) Das Voulmen berechnet man mit den Ergebnissen aus a) und b) am einfachsten mit der 2. Guldinschen Regel

$$V_x = 2\pi \cdot S_y \cdot A = 2\pi \cdot M_x = \frac{\pi(\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5)}{2}, \quad V_y = 2\pi \cdot S_x \cdot A = 2\pi \cdot M_y = \pi.$$

Lösung 9.23



a) Die Fläche ist die Differenz aus zwei Flächen

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{4-4x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = 2\frac{\pi}{2} = \pi, \\ A_2 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}, \\ A &= A_1 - A_2 = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) Die x-Koordinate des Schwerpunktes ist $x_S = 0$, die y-Koordinate berechnet aus dem Momenten

$$\begin{aligned} M_{1,x} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-4x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4x - \frac{4}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{8}{3}, \\ M_{2,x} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Da Momente additiv sind, ergibt sich das Gesamtmoment M_x aus der Differenz der Einzelmomente

$$M_x = M_{x,1} - M_{x,2} = \frac{8}{3} - \frac{8}{15} = \frac{32}{15}$$

und der Schwerpunkt

$$S_y = \frac{M_x}{A} = \frac{32}{15(\pi - \frac{4}{3})} = \frac{32}{15\pi - 20}.$$

c) **1. Möglichkeit:** Das Volumen bei der Rotation um die x-Achse berechnet man mit der 2. Guldinschen Regel

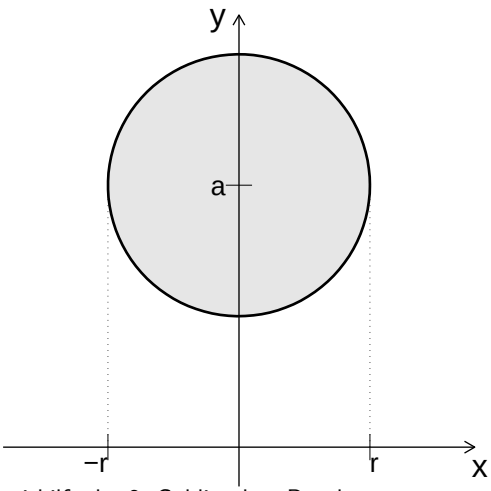
$$V_x = 2\pi \cdot y_S \cdot A = 2\pi \cdot M_x = \frac{64\pi}{15}.$$

2. Möglichkeit: Man kann das Volumen auch aus der Differenz zweier Volumina berechnen

$$\begin{aligned} V_{x,1} &= \pi \int_{-1}^{1} \left(4 - 4x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{16\pi}{3} \\ V_{x,2} &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{16\pi}{15} \\ V_x &= V_{x,1} - V_{x,2} = \frac{16\pi}{3} - \frac{16\pi}{15} = \frac{64\pi}{15}. \end{aligned}$$

Lösung 9.24

1. Möglichkeit Man berechnet das Volumen



mithilfe der 2. Guldinschen Regel

$$V_x = 2\pi \cdot A \cdot S_y = 2\pi \cdot \pi r^2 \cdot a = 2\pi^2 r^2 a,$$

dabei ist $A = \pi r^2$ die Kreisfläche und die y-Koordinate des Schwerpunktes der Kreisfläche ist $S_y = a$. Bei dieser Lösungsvariante setzen wir voraus, dass die Guldinsche Regel auch für Flächen gilt, die durch zwei Funktionen begrenzt sind. In der Vorlesung haben wir zwar nur den einfacheren Fall, dass die Fläche durch eine Funktion und die x-Achse begrenzt ist betrachtet, dieser allgemeinere Fall gilt jedoch auch.

2. Möglichkeit

Hier entsteht das Volumen aus der Differenz von zwei Körpern. Der Kreis mit Mittelpunkt $M(0\,|\,a)$ und Radius r hat die Gleichung

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2,$$

daraus ergeben sich die obere Funktion $y = a+\sqrt{r^2-x^2}$ und die untere Funktion $y = a-\sqrt{r^2-x^2}$. Das Volumen berechnet man durch Integration

$$V_x = \pi \int_{-r}^{r} \left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} \left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Die Integration vereinfacht sich, wenn man alles unter ein Integral zusammenfasst,

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-r}^{r} a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2) - \left(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-r}^{r} 4a\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 8\pi a \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 8\pi a \left[\tfrac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}\right]_0^r = 8\pi a \tfrac{r^2}{2}\arcsin 1 = 2\pi^2 r^2 a. \end{aligned}$$

Lösung 9.25

Für $n = 1$ liefert die Trapezregel

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0.6839.$$

Für $n = 2$ ergeben sich zwei Trapeze

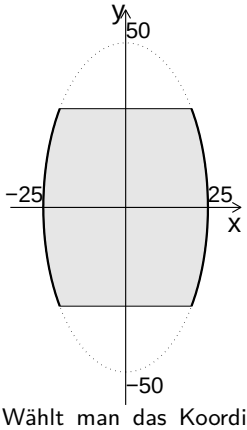
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{4}\left(1+2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}+\mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0.7314.$$

Bei $n = 4$ Trapezen ergibt sich

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{8}\left(1+2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}}+2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}+2\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{16}}+\mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0.7430.$$

Der exakte Wert 0.7468241330 wird bereits bei 4 Trapezen recht gut angenähert.

Lösung 9.26



Wählt man das Koordinatensystem wie abgebildet, dann ist der Mittelpunkt der Ellipse der Ursprung, deshalb hat die Ellipse die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Werte a und b bestimmt man durch Punktproben

$$P(25\,|\,0): \quad \frac{25^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow a = 25,$$
$$P(20\,|\,30): \quad \frac{20^2}{25^2} - \frac{30^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b = 50.$$

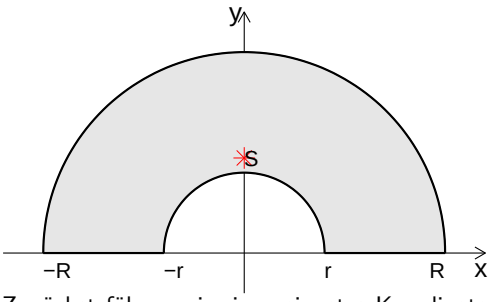
Bei der Rotation um die y-Achse lösen wir nach x auf

$$x = \pm 25\sqrt{1 - \frac{y^2}{50^2}}.$$

Das Volumen berechnet man durch Integration

$$V_x = \pi \int_{-30}^{30} \left(25\sqrt{1 - \frac{y^2}{50^2}}\right)^2 \mathrm{d}y = 2 \cdot 25^2 \pi \int_0^{30} \left(1 - \frac{y^2}{50^2}\right) \mathrm{d}y = 2 \cdot 25^2 \pi \left[y - \frac{y^3}{3 \cdot 50^2}\right]_0^{30} =$$

Lösung 9.27



Zunächst führen wir ein geeignetes Koordinatensystem ein, siehe Abbildung. Der Schwerpunkt hat die x-Koordinate $S_x = 0$. Die Fläche berechnet man aus der Formel für die Kreisfläche

$$A = \frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi r^2).$$

und das Volumen aus der Formel für das Kugelvolumen

$$V_x = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

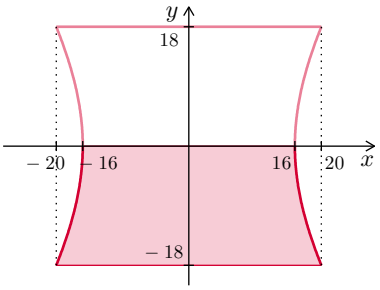
Dadurch ergibt sich nach der 2. Guldinschen Regel, die ja auch für Hohlkörper gilt,

$$S_y = \frac{V_x}{2\pi A} = \frac{4\pi(R^3 - r^3)}{\pi 3\pi(R^2 - r^2)} = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)}.$$

Lösung 9.28

Wählt man das Koordinatensystem wie abgebildet, dann ist der Mittelpunkt der Hyperbel der Ursprung, deshalb hat die Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Die Werte a und b bestimmt man durch Punktproben

$$\begin{aligned} P(16\,|\,0): &\quad \frac{16^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow a = 16, \\ P(20\,|\,-18): &\quad \frac{20^2}{16^2} - \frac{18^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b = 24. \end{aligned}$$

Bei der Rotation um die y-Achse lösen wir nach x auf

$$x = \pm 16\sqrt{1 + \frac{y^2}{24^2}}.$$

Die Umkehrfunktion lautet somit

$$f^{-1}(x) = \pm 16\sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}.$$

Das Volumen berechnet man durch Integration

$$V_y = \pi \int_{-18}^{0} \left(16\sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}\right)^2 \mathrm{d}\,x = 256\,\pi \int_{-18}^{0} \left(1 + \frac{x^2}{24^2}\right) \mathrm{d}\,x.$$

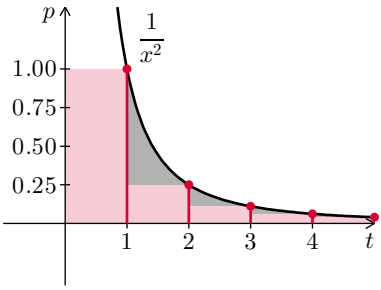
Einsetzen der Grenzen liefert

$$V_y = 256\pi \left[x + \frac{x^3}{3 \cdot 24^2}\right]_{-18}^{0} = 5472\pi.$$

Lösung 9.29

Die Summe für die insgesamt angelagerten Partikelrückstände beträgt

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{G}{2k^2}\,.$$



Um diese Summe näherungsweise auszurechnen, kann man $\frac{G}{2}$ aus der Summe herausziehen, den ersten Summanden separat schreiben und die restlichen Summanden schließlich mit 1 multiplizieren:

$$p(n) = \frac{G}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{G}{2}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{G}{2}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \cdot 1\right)\,.$$

Nun schätzt man diese Summe nach oben ab: Man lässt die Summe bis ∞ laufen.

$$p(n) \leq \frac{G}{2}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot 1\right) \leq \frac{G}{2}\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}\, x\right) .$$

Die Terme $\frac{1}{k^2} \cdot 1$ kann man als Rechteckinhalte interpretieren. Da die Funktion $\frac{1}{x^2}$ stets oberhalb von $\frac{1}{k^2}$ liegt, ist der Flächeninhalt unterhalb von $\frac{1}{x^2}$ größer als die Summe der Rechtecke. Nun wird das Integral einfach ausgerechnet:

$$p(n) \leq \frac{G}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty}\right) = \frac{G}{2}\left(1 + (0 + 1)\right) = G .$$

Auch bei sehr langer Fahrt überschreitet die Menge der insgesamt angelagerten Partikelrückstände den Grenzwert G nicht.

10 Potenzreihen

Lösung 10.1
Die Verallgemeinerung kann man so nicht treffen. Beispielsweise hat die Funktion

$$f(x) = 2 + \sin x = 2 + x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

nur positive Funktionswerte, aber die Koeffizienten der Potenzreihe sind nicht alle positiv.

Lösung 10.2
Wenn für manche Indizes k der Koeffizient a_k null wird, dann ist das nicht problematisch. Bei dem Quotienten- oder dem Wurzelkriterium ist ja lediglich der Grenzwert entscheidend.

Lösung 10.3
Bie der Funktion f sind der Funktionswert und die Werte aller Ableitungen an der Stelle $x = 0$ null

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \dots$$

Lösung 10.4
Man kann die Aufgaben durch zwei unterschiedliche Methoden lösen:
Methode 1: Man berechnet alle Ableitungen bis einschließlich der dritten Ableitung und verwendet die Formel

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Methode 2: Man verwendet bekannte Reihen für die Funktionen $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$.
In der Regel ist die zweite Methode einfacher.

a) **Methode 1:** Mithilfe der Quotientenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{1-x} \Longrightarrow a_0 = \frac{f(0)}{0!} = 0, \\ f'(x) &= \frac{\cos(x)(1-x) + \sin(x)}{(1-x)^2} \Longrightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Die höheren Ableitungen sind mithilfe der Quotientenregel nur sehr mühsam zu berechnen, deshalb verwendet man lieber die Umformung

$$f(x)(1-x) = \sin(x)$$

und berechnet die Ableitung mit der Produktregel

$$f'(x)(1-x) - f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1.$$

Der selbe Trick für die zweite Ableitung

$$f''(x)(1-x) - f'(x) - f'(x) = \sin(x) \Longrightarrow f''(0) = 2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1$$

und für die dritte Ableitung

$$f'''(x)(1-x) - f''(x) - 2\,f''(x) = -\cos(x) \Longrightarrow f'''(0) = 5 \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{5}{6}$$

ergibt das Taylorpolynom

$$p_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + \frac{5}{6}x^3.$$

Methode 2: Durch Multiplikation der geometrischen Reihe und der Reihe für $\sin x$

$$\sin x \cdot \frac{1}{1-x} = (x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = x + x^2 + x^3 - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

ergibt sich das gesuchte Taylorpolynom

$$p_3(x) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3.$$

b) **Methode 1:**

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x} \Longrightarrow a_0 = \frac{g(0)}{0!} = 1,\\
g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x \Longrightarrow a_1 = \frac{g'(0)}{1!} = \frac{-1}{1} = -1,\\
g''(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin x \Longrightarrow a_2 = \frac{g''(0)}{2!} = \frac{0}{2} = 0,\\
g'''(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos x - 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin x \Longrightarrow a_3 = \frac{g'''(0)}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich das Taylorpolynom

$$p_3(x) = 1 - 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Methode 2: Durch Multiplikation der Reihe für $\cos x$ und e^{-x}

$$\cos x \cdot \mathrm{e}^{-x} = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots) \cdot (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \ldots) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots$$

ergibt sich das gesuchte Taylorpolynom

$$p_3(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3.$$

c) **Methode 1:** Mithilfe der Quotientenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\ln(1+x)}{1-x^2} \Longrightarrow a_0 = \frac{h(0)}{0!} = 0,\\
h'(x) &= \frac{1 - x + 2\,x\,\ln(1+x)}{(1-x^2)^2} \Longrightarrow a_1 = \frac{h'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Die höheren Ableitungen sind mithilfe der Quotientenregel nur sehr mühsam zu berechnen, deshalb verwendet man lieber die Umformung

$$(1-x^2)h(x) = \ln(1+x)$$

und berechnet die Ableitung mit der Produktregel

$$-2\,x\,h(x) + (1-x^2)h'(x) = (1+x)^{-1} \Longrightarrow h'(0) = 1 \Longrightarrow a_1 = \frac{h'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1.$$

Der selbe Trick für die zweite Ableitung

$$-2\,h(x) - 2\,x\,h'(x) - 2\,x\,h'(x) + (1-x^2)h''(x) = -(1+x)^{-2} \Longrightarrow a_2 = \frac{h''(0)}{2!} = \frac{-1}{2}$$

und für die dritte Ableitung

$$-6\,h'(x) - 6\,x\,h''(x) + (1-x^2)h'''(x) = 2(1+x)^{-3} \Longrightarrow a_3 = \frac{h'''(0)}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

ergibt das Taylorpolynom

$$p_3(x) = 0 + 1\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

Methode 2: Zunächst brauchen wir die Reihenentwicklungen der beteiligten Funktionen $\ln(1+x)$ und $\dfrac{1}{1-x^2}$. Beide Funktionen lassen sich aus der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

herleiten. Es ist

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + C,$$

wobei die Integrationskonstante $C = 0$ sein muss. Andererseits ist

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \ldots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

Durch Multiplikation der beiden Reihen

$$\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots)\cdot(1 + x^2 + \ldots) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3 + \ldots$$

ergibt sich das gesuchte Taylorpolynom

$$p_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

Lösung 10.5

a) Es ist

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

und durch Ersetzen von x durch x^2 ergibt sich

$$f_1(x) = \sin x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}(x^2)^{2k-1} = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \ldots$$

Die sin-Reihe konvergiert für alle reellen Zahlen, also ist der Konvergenzradius $r = \infty$.

b) Die Reihen für den Logarithmus hängen mit der geometrischen Reihe zusammen, denn es gilt

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right)\mathrm{d}x \\ &= x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + C. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante kann man durch Einsetzen von $x = 0$

$$-\ln 1 = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{1}{4}0^4 + \frac{1}{5}0^5 + \ldots + C \Longrightarrow C = 0,$$

bestimmen. Wenn man jetzt noch x durch x^2 ersetzt und mit -1 multipliziert ergibt sich

$$f_2(x) = \ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{1}{2}\cdot x^4 - \frac{1}{3}\cdot x^6 - \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{5}x^{10} + \ldots$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$, also ist der Konvergenzradius $r = 1$.

c) Eine Reihe für $\arctan x$ erhält man auch durch Integration. Spätestens seit der Partialbruchzerlegung weiss man

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C.$$

Andererseits kann man eine Reihe für $\dfrac{1}{1+x^2}$ aus der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots, \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots \end{aligned}$$

herleiten. Aus beiden Formeln zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x\cdot\arctan x = x\cdot\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots\right)\mathrm{d}x \\ &= x\cdot\left(x - \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot x^5 - \frac{1}{7}\cdot x^7 + \frac{1}{9}\cdot x^9 - \frac{1}{11}\cdot x^{11} + \ldots\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^4 + \frac{1}{5}\cdot x^6 - \frac{1}{7}\cdot x^8 + \frac{1}{9}\cdot x^{10} - \frac{1}{11}\cdot x^{12} + \ldots \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$, also ist der Konvergenzradius $r = 1$.

Lösung 10.6

a) Die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \ldots$$

ist ähnlich zur geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

Wenn man x ausklammert

$$f(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-2} = x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots)$$

und in der geometrischen Reihe x durch x^2 ersetzt

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots,$$

ergibt sich

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

b) Die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \cdot x^{2k} = 1 - 4 \cdot x^2 + 4^2 \cdot x^4 - 4^3 \cdot x^6 + 4^4 \cdot x^8 + \ldots$$

kann man umformen in

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2^2)^k \cdot x^{2k} = 1 - 2^2 \cdot x^2 + 2^4 \cdot x^4 - 2^6 \cdot x^6 + 2^8 \cdot x^8 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \cdot (-1)^k \cdot (2x)^{2k} = 1 - (2x)^2 + (2x)^4 - (2x)^6 + (2x)^8 + \ldots \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion $f(x)$ ist also eine Art geometrische Reihe mit alternierendem Vorzeichen, bei der nur gerade Potenzen auftreten. Wenn man in die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,$$

x durch $-x^2$ ersetzt, dann ergibt sich

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

Für die gesuchte Funktion muss man nur noch x durch $2x$ ersetzen

$$f(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-(2x)^2\right)^k = 1 - (2x)^2 + (2x)^4 - (2x)^6 + (2x)^8 - \ldots$$

c) Bei der Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot x^5 + + \frac{1}{5 \cdot 6} \cdot x^6 \ldots$$

werden die Koeffizienten immer entsprechend der Hochzahl geteilt, also durch Ableiten kann man Faktoren kürzen. Es ist

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1) \cdot x^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{1} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} x^5 \ldots$$

und

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Lösung 10.7

Wenn man wissen möchte für welche x-Werte die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergiert, berechnet man den Konvergenzradius r mit einer der beiden Formeln

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad r = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Die Reihe konvergiert sicher für alle x-Werte mit $x_0 - r < x < x_0 + r$, dabei bezeichnet x_0 den Entwicklungspunkt. Ob die Reihe für $x_0 = \pm r$ konvergiert, lässt sich dadurch allerdings nicht entscheiden. Die Randpunkte werden bei diesen Beispielen nicht betrachtet.

a) Bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot x^k = 0\cdot x^0 + 1\cdot x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + 4\cdot x^4 \ldots$$

ist $x_0 = 0$, $a_k = k$ und

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Somit konvergiert die Reihe für $-1 < x < 1$.

b) Bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot x^{2k} = \frac{1}{3^0}\cdot x^0 + \frac{1}{3^1}\cdot x^2 + \frac{1}{3^2}\cdot x^4 + \frac{1}{3^3}\cdot x^6 + \frac{1}{3^4}\cdot x^8 + \ldots$$

kann man $x^2 = u$ substituieren. Dadurch ergibt sich die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot u^k = \frac{1}{3^0}\cdot u^0 + \frac{1}{3^1}\cdot u^1 + \frac{1}{3^2}\cdot u^2 + \frac{1}{3^3}\cdot u^3 + \frac{1}{3^4}\cdot u^4 + \ldots$$

mit $u_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{3^k}$ und

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|3| = 3.$$

Somit konvergiert die Reihe für

$$-3 < u < 3 \Longrightarrow -3 < x^2 < 3 \Longrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

c) Bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}x^k = \frac{1}{1}\cdot x^1 + \frac{1}{2^2}\cdot x^2 + \frac{1}{3^3}\cdot x^3 + \frac{1}{4^4}\cdot x^4 + \ldots$$

ist $x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k^k}$ und

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Somit konvergiert die Reihe für alle reellen Zahlen.

d) Bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^{2k} = \frac{1}{1!} \cdot x^2 + \frac{1}{2!} \cdot x^4 + \frac{1}{3!} \cdot x^6 + \frac{1}{4!} \cdot x^8 + \frac{1}{5!} \cdot x^{10} + \dots$$

kann man $x^2 = u$ substituieren. Dadurch ergibt sich die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot u^k = \frac{1}{1!} \cdot u^1 + \frac{1}{2!} \cdot u^2 + \frac{1}{3!} \cdot u^3 + \frac{1}{4!} \cdot u^4 + \frac{1}{5!} \cdot u^5 + \dots$$

mit $u_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k!}$ und

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty.$$

Diese Reihe konvergiert für alle reellen u und somit die ursprüngliche Reihe für alle reellen x.

e) Bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k = 1! \cdot x^1 + 2! \cdot x^2 + 3! \cdot x^3 + 4! \cdot x^4 \dots$$

ist $x_0 = 0$, $a_k = k$ und

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0.$$

Somit konvergiert die Reihe für keine reellen Zahlen, außer für $x = 0$.

f) Bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k} \cdot (x-1)^k = \frac{-1 \cdot 2}{1} \cdot (x-1) + \frac{1 \cdot 2^2}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{-1 \cdot 2^3}{3} \cdot (x-1)^3 + \frac{-1 \cdot 2^4}{4} \cdot (x-1)^4 + \dots$$

ist $x_0 = 1$, $a_k = \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k}$ und

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot (n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \frac{1}{2}.$$

Somit konvergiert die Reihe für $|x-1| < \frac{1}{2}$, also für $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

Lösung 10.8

a) Die Funktion $\ln(1-3x)$ lässt sich auf die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

zurückführen, denn

$$\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)\,\mathrm{d}x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots + C,$$

wobei die Integrationskonstante C sich für $x = 0$ zu null ergibt. Daraus erhält man

$$\ln(1-3x) = -(3x) - \frac{1}{2}(3x)^2 - \frac{1}{3}(3x)^3 - \frac{1}{4}(3x)^4 \ldots = -3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{3}x^3 - \frac{81}{4}x^4 \ldots$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x} = \lim_{x\to 0}(-3 - \frac{9}{2}x - \frac{27}{3}x^2 - \frac{81}{4}x^3 \ldots) = -3.$$

b)

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

und durch Ersetzen von x durch x^2 ergibt sich

$$\sin x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}(x^2)^{2k-1} = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \ldots$$

Die Funktion $\ln(1+x^2)$ lässt sich auf die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

zurückführen, denn aus **a)** wissen wir

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots,$$

und durch Ersetzen von x durch $-x^2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2) = \ln(1-(-x^2)) &= -(-x^2) - \frac{1}{2}(-x^2)^2 - \frac{1}{3}(-x^2)^3 - \frac{1}{4}(-x^2)^4 \ldots \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 \ldots,\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \ldots}{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} + \frac{x^{16}}{9!} + \ldots}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^6 \ldots} = 1.$$

c) Die Lösung dieser Aufgabe ist trickreich. Auf Funktionen der Bauart $(\cdots)^{\frac{1}{x}}$ wendet man am besten $e^{\ln(\cdots)\frac{1}{x}}$ an. In unserem konkreten Fall ergibt sich

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x^2)\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)}.$$

Man braucht also nur noch eine Reihenentwicklung für $\ln(1+x^2)$, die man natürlich aus der geometrischen Reihe ableitet, siehe **b)**,

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 \ldots$$

Dadurch ergibt sich

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} e^{x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{4}x^7\cdots} = e^0 = 1.$$

Lösung 10.9

$$\frac{x^4}{1-x^2} = x^4(1+x^2+x^4+x^6+\ldots) = x^4+x^6+x^8+x^{10}+\ldots$$
$$\mathrm{e}^{x^2} = 1+\frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\ldots$$

Lösung 10.10

$$\frac{1-\cos\left((x-1)^2\right)}{(x-1)^4} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}(x-1)^4+\frac{1}{4!}(x-1)^8-\ldots\right)}{(x-1)^4} = \frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}(x-1)^4-\ldots$$

Lösung 10.11

Aus der e^x Reihe

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

bestimmt man eine Reihenentwicklung für $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1+t)^2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1+t)^2} &= 1-\frac{1}{2}(1+t)^2+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(1+t)^2)^2+\frac{1}{3!}(-\frac{1}{2}(1+t)^2)^3+\ldots\\ &= 1-\frac{1}{2}(1+t)^2+\frac{1}{8}(1+t)^4-\frac{1}{48}(1+t)^6+\ldots\end{aligned}$$

Dabei ist die Entwicklungsstelle $t_0 = -1$ und die Reihenentwicklung konvergiert für alle reellen x. Man erhält

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{x-1}(1-\frac{1}{2}(1+t)^2+\frac{1}{8}(1+t)^4-\frac{1}{48}(1+t)^6+\ldots)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[t-\frac{1}{6}(1+t)^3+\frac{1}{40}(1+t)^5-\frac{1}{336}(1+t)^7+\ldots\right]_{-1}^{x-1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(x-1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{336}x^7+\ldots+1).\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine alternierende Reihe mit monoton gegen null gehenden Gliedern, somit lässt sich das Leibniz-Kriterium anwenden und der Näherungswert

$$\Phi(0.35) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(0.35-\frac{1}{6}0.35^3)$$

ist bestimmt auf 3 Nachkommastellen genau, da das erste vernachlässigte Glied $\frac{1}{40}0.35^5$ vom Betrag her kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Lösung 10.12

Aus der $\cos x$ Reihe

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots$$

bestimmt man eine Reihenentwicklung für $\cos x^2$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{6!}x^{12} + \dots$$

Dadurch ist

$$f(x) = \frac{1-\cos x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4!}x^8 + \frac{1}{6!}x^{12} + \dots\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^6 + \frac{1}{6!}x^{10} + \dots$$

und

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^6 + \frac{1}{6!}x^{10} + \dots\right) = 0.$$

Für das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^6 + \frac{1}{6!}x^{10} + \dots\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{7\cdot 4!}x^7 + \frac{1}{11\cdot 6!}x^{11} + \dots\right]_0^1\\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{7\cdot 4!} + \frac{1}{11\cdot 6!} + \dots\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine alternierende Reihe mit monoton gegen null gehenden Gliedern, somit lässt sich das Leibniz-Kriterium anwenden und der Näherungswert

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6} - \frac{1}{168} = \frac{27}{168} = \frac{9}{56}$$

ist bestimmt auf 3 Nachkommastellen genau, da das erste vernachlässigte Glied $\frac{1}{7920}$ vom Betrag her kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Lösung 10.13

Eine Näherungsformel für die Funktion

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

kann man mithilfe der Reihenentwicklung von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

bestimmen. Wenn v wesentlich kleiner als c ist, dann ist $\frac{v}{c}$ nahe bei 0 und eine Reihenentwicklung mit der Entwicklungstelle $x_0 = 0$ bietet sich an:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Es ist

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}},\quad f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}},\quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}},\quad f'''(x) = \frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}},\dots$$

und

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = \frac{1}{2},\quad f''(0) = \frac{3}{4},\quad f'''(0) = \frac{15}{8},\dots$$

Somit

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots .$$

Insgesamt erhalten wir

$$m(v) = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots \right).$$

Der quadratische Ausdruck in v

$$m(v) \approx m_0 + \frac{m_0}{2\,c^2}\,v^2$$

stellt bereits eine gute Näherung dar.

11 Kurven

Lösung 11.1

Die Gleichung der Geraden in Parameterform lautet

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Auflösen der beiden Koordinaten nach t und anschließendem Gleichsetzen erhält man die Gerade in der Form

$$g: \quad y = 2x - 1.$$

Den Schnittwinkel bestimmt man aus der Steigung:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha = \arctan 2 \approx 63^\circ.$$

Die Gerade senkrecht zu g durch den Ursprung hat die Gleichung in Parameterform

$$h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wiederum durch Auflösen nach t und Gleichsetzen erhält man

$$h: \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

Der Schnittpunkt S von g und h ist der Punkt auf g, der den kürzesten Abstand zum Ursprung hat. Den Schnittpunkt berechnet man aus

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad S\left(\frac{2}{5} \,\middle|\, -\frac{1}{5}\right).$$

Also beträgt der Abstand $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

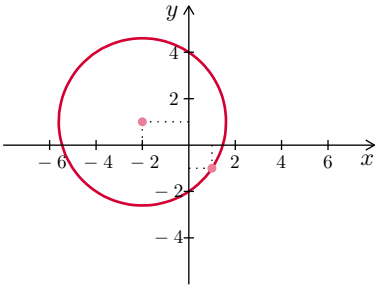
Lösung 11.2

Wir verwenden die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

mit $x_0 = -2$ und $y_0 = 1$. Den Radius kann man aus dem Abstand des Punktes mit den Koordinaten $(1\,|\,-1)$ vom Mittelpunkt bestimmen:

$$r = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}.$$



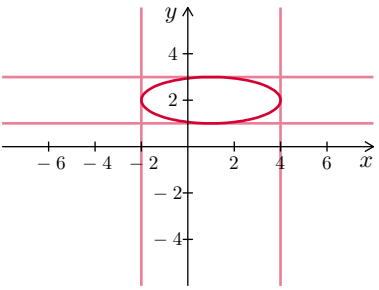
Die gesuchte Kreisgleichung lautet somit

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Eine Parameterdarstellung lautet

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{13}\cos t \\ 1 + \sqrt{13}\sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi].$$

Lösung 11.3



Der Mittelpunkt der Ellipse ist der Mittelwert der Koordinaten der Berührpunkte:

$$x_0 = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y_0 = \frac{1+3}{2} = 2\,.$$

Auch die Halbachsen ergeben sich aus den Koordinaten der Berührpunkte:

$$a = \frac{4-(-2)}{2} = 3, \quad b = \frac{3-1}{2} = 1\,.$$

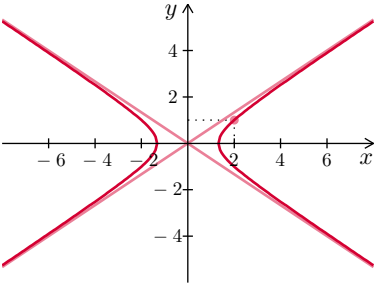
Die Gleichung der Ellipse lautet also

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1.$$

Eine Parameterdarstellung lautet

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 1+3\cos t \\ 2+\sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi].$$

Lösung 11.4



Der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Ursprung. Außerdem gilt $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$. Die Gleichung lautet also

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{9y^2}{4a^2} = \pm 1.$$

Die Punktprobe für P ergibt

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4a^2} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{7}}{2}, b = \frac{\sqrt{7}}{3}\,.$$

Das Schaubild der Hyperbel ist aufgrund der Lage von P und den Asymptoten nach links und rechts geöffnet. Damit lautet die Hyperbelgleichung

$$\frac{4\,x^2}{7} - \frac{9\,y^2}{7} = 1\,.$$

Eine Parameterdarstellung lautet

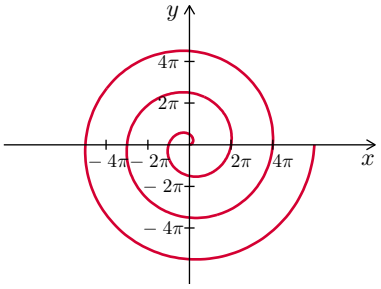
$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\cosh t \\ \frac{\sqrt{7}}{3}\sinh t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Lösung 11.5

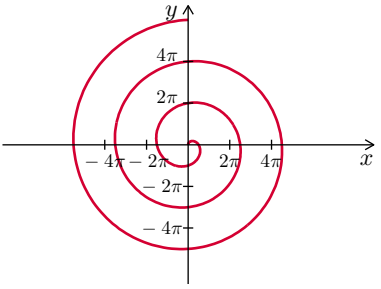
Die Kurven $\boldsymbol{c_3}$ und $\boldsymbol{c_4}$ scheiden aus, denn die Abstände der einzelnen Umdrehungen sind bei

der abgebildeten Kurve jeweils gleich. Bei den Kurven $\boldsymbol{c_3}$ und $\boldsymbol{c_4}$ ändern sich die Abstände quadratisch. Die abgebildete Spirale hat insgesamt drei Umdrehungen, t_1 muss also $3 \cdot 2\pi$ sein. Der Endpunkt der Kurve $\boldsymbol{c_1}$ ist $\boldsymbol{c_1}(6\pi) = \begin{pmatrix} 6\pi \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist also die Kurve $\boldsymbol{c_2}$ abgebildet.

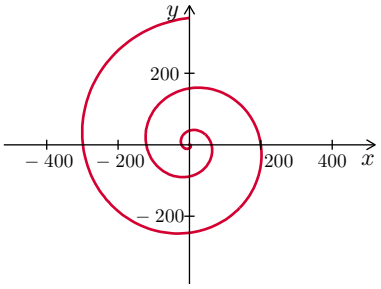
a)



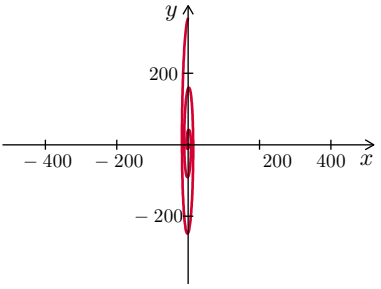
b)



c)



d)



Lösung 11.6

Alle Teilaufgaben verlaufen nach demselben Schema: Durch quadratisches Ergänzen und Vergleich mit der Normalform bestimmt man die charakteristischen Kenngrößen.

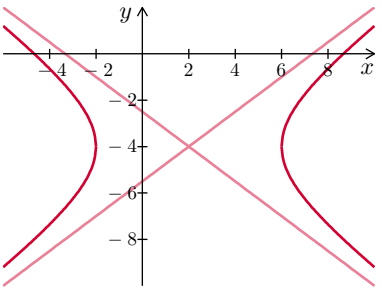
a) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$9(x^2 - 4x + 4) - 9 \cdot 4 - 16(y^2 + 8y + 16) + 16 \cdot 16 = 364 \,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcrcl} 9(x-2)^2 & - & 16(y+4)^2 & = & 144 \\ \dfrac{(x-2)^2}{4^2} & - & \dfrac{(y+4)^2}{3^2} & = & 1 \end{array}$$

Die Gleichung beschreibt also eine Hyperbel mit Mittelpunkt $(2\,|\,-4)$ und Steigung der Asymptoten $\pm\dfrac{3}{4}$.



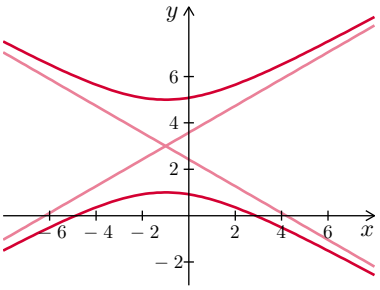
b) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$(x^2 + 2\,x + 1) - 3(y^2 - 6y + 9) = 1 - 3 \cdot 9 + 14 \,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 - 3(y-3)^2 &=& -12 \\ \dfrac{(x+1)^2}{12} - \dfrac{(y-3)^2}{4} &=& -1 \end{array}$$

Die Gleichung beschreibt also eine Hyperbel mit Mittelpunkt $(-1\,|\,3)$ und Steigung der Asymptoten $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



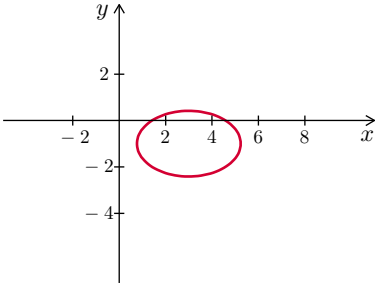
c) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$2(x^2-6x+9)+5(y^2+2y+1) = 2\cdot 9+5\cdot 1-13\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} 2(x-3)^2 + 5(y+1)^2 &=& 10 \\ \dfrac{(x-3)^2}{5} + \dfrac{(y+1)^2}{2} &=& 1 \end{array}$$

Die Gleichung beschreibt also eine Ellipse mit Mittelpunkt $(3\,|\,-1)$ und Halbachsen $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}$.



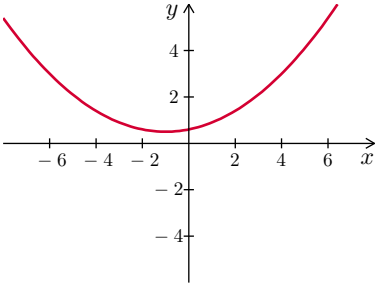
d) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$(x^2+2x+1)-10y = -5\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 - 10y &=& -5 \\ y &=& \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}(x+1)^2 \end{array}$$

Die Gleichung beschreibt also eine Parabel mit Scheitelpunkt $S\left(-1\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)$.



e) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$4(x^2-2x+1)-(y^2-6y+9) = 4-9+5\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} 4(x-1)^2 - (y-3)^2 &=& 0 \\ y &=& 3\pm 2(x-1) \end{array}$$

Die Gleichung beschreibt also ein Geradenpaar mit Schnittpunkt in $(1\,|\,3)$ und Steigungen ± 2.

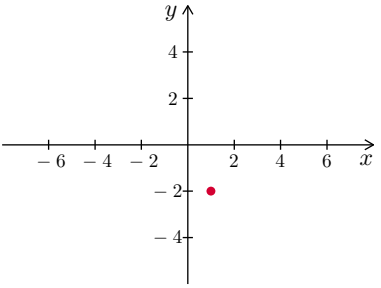
f) Quadratische Ergänzung liefert zunächst

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 4 - 5 .$$

Hieraus folgt

$$(x-1)^2 \quad + \quad (y+2)^2 \quad = \quad 0$$

Lediglich der Punkt mit den Koordinaten $(1\,|\,-2)$, also ein Kreis mit Mittelpunkt $(1\,|\,-2)$ und Radius 0, erfüllt die Gleichung.

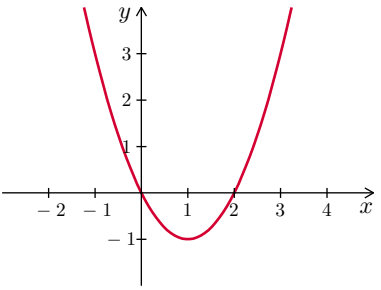


Lösung 11.7

a) Die Kurve mit den Koordinatenfunktionen

$$x = 1 - t, \quad y = t^2 - 1$$

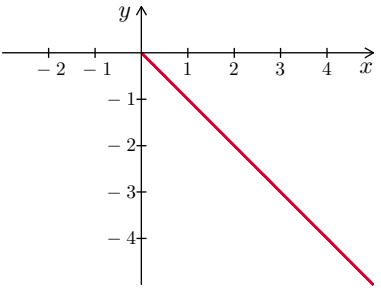
ergibt die Parabel $y = (1-x)^2 - 1$.



b) Die Kurve mit den Koordinatenfunktionen

$$x = t^2, \quad y = -t^2$$

ergibt die Halbgerade $y = -x$, wobei x nicht negativ wird und die Halbgerade zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird.



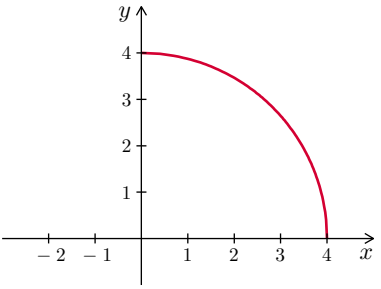
c) Für die Kurve mit den Koordinatenfunktionen

$$x = 4\sqrt{t}, \quad y = 4\sqrt{1-t}$$

gilt

$$x^2 + y^2 = 16t + 16(1-t) = 16 .$$

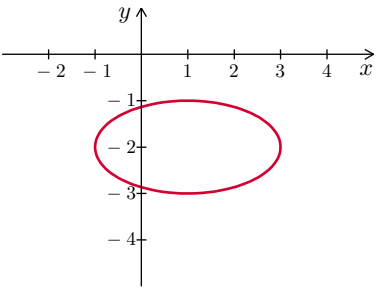
Also liegt die Kurve auf einem Ursprungskreis mit Radius 4. Da x nur zwischen 0 und 1 verläuft, erhalten wir einen Viertelkreis im ersten Quadranten.



d) Die Kurve mit den Koordinatenfunktionen

$$x = 1 + 2\cos t, \quad y = -1 + \sin t$$

beschreibt eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(1\,|\,-2)$ und den Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$.

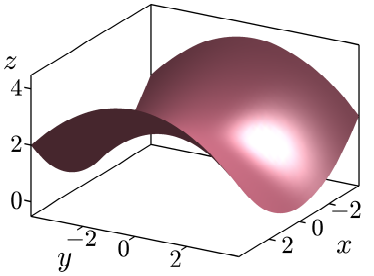


Lösung 11.8

Das Schaubild der Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

hat die Form eines Sattels. Die Schnittkurven erhält man, in dem man jeweils die Ebenengleichungen in die Funktion $z = f(x, y)$ einsetzt.

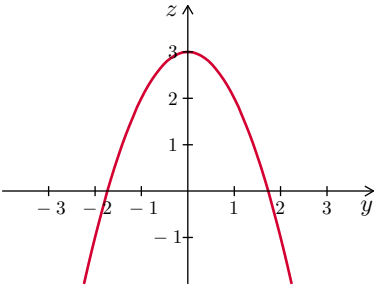


a) Die Schnittkurve für

$$x = 1$$

ist eine Parabel:

$$z = -y^2 + 3\,.$$

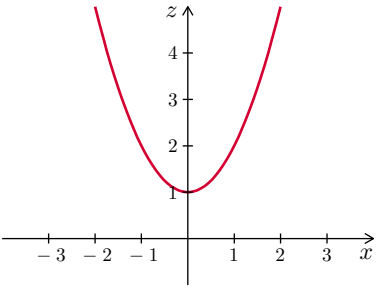


b) Die Schnittkurve für

$$y = 1$$

ist ebenfalls eine Parabel:

$$z = x^2 + 1\,.$$



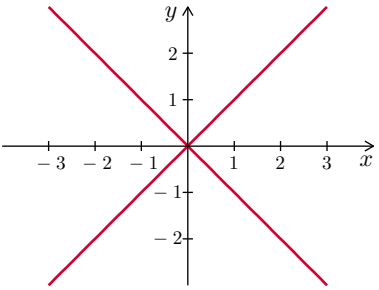
c)

Die Schnittkurve für

$$z = 2$$

ist ein Geradenpaar:

$$y = \pm x \, .$$



d) Die Schnittkurve für

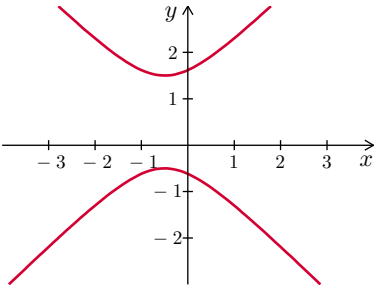
$$x + y + z = 1$$

ist eine Hyperbel, denn durch Einsetzen folgt

$$x^2 - y^2 + 2 = 1 - x - y$$

und daraus

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -1 \, .$$



Lösung 11.9

Wir betrachten für den festen Radius

$$r = 1$$

zunächst den Fall $a < r$ und wählen dazu beispielhaft

$$a = 0.5 \, .$$

Das Schaubild ist eine gestreckte Zykloide.

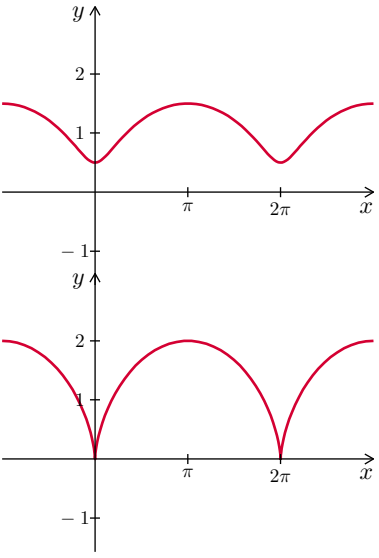
Wir betrachten für den festen Radius

$$r = 1$$

nun den Fall $a = r$ und setzen also

$$a = 1 \, .$$

Das Schaubild ist eine gewöhnliche Zykloide.



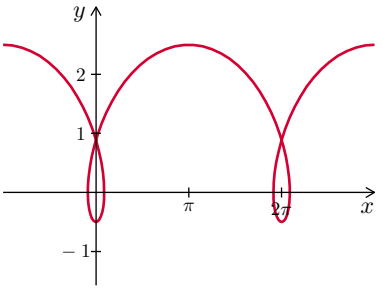
Wir betrachten für den festen Radius

$$r = 1$$

schließlich den Fall $a > r$ und wählen dazu beispielhaft

$$a = 1.5\,.$$

Das Schaubild ist eine verschlungene Zykloide.



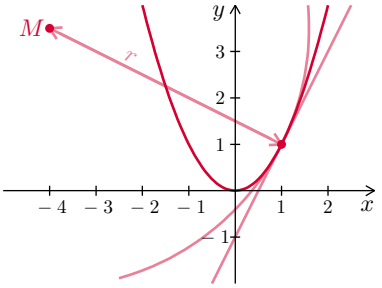
Lösung 11.10

Die parametrisierte Kurve

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

stellt die Normalparabel dar. Wir bilden die beiden Ableitungen

$$\boldsymbol{c}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Durch Einsetzen von $t = 1$ in die erste Ableitung erhalten wir die Tangente in Parameterform oder als Funktion:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = 2x - 1\,.$$

Für die Kümmung erhalten wir

$$\kappa(t) = \frac{1 \cdot 2 - 0 \cdot 2t}{\sqrt{(1^2 + (2t)^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}}, \quad \kappa(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}}\,.$$

Die Koordinaten des Krümmungskreismittelpunktes M für $t = 1$ berechnen wir aus dem Einheitsvektor $\boldsymbol{n}(1)$, der senkrecht auf dem Tangentenvektor steht

$$\boldsymbol{c}'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich erhalten wir den Ortsvektor $\boldsymbol{m}(1)$ des Krümmungskreismittelpunktes M aus

$$\boldsymbol{m}(1) = \boldsymbol{c}(1) + \frac{1}{\kappa(1)}\,\boldsymbol{n}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung 11.11

Für $k \neq 0, n$ können wir zunächst die Ableitung mit der Produktregel bestimmen:

$$B_k^{n\prime}(t) = \binom{n}{k} \left(k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - t^k (n-k)(1-t)^{n-k-1} \right) = \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} (k - nt)\,.$$

Für $t = \frac{k}{n}$ wird der letzte Faktor $(k - nt)$ in $B_k^{n\prime}(t)$ zu null. Damit ist die notwendige Bedingung für ein Maximum erfüllt. Der Binomialkoeffizient und alle Potenzen von t sind für $t \in [0,1]$ nicht negativ. Somit ist ausschließlich der Faktor $(k - nt)$ für einen Vorzeichenwechsel verantwortlich. Dieser Faktor wechselt an der Stelle $t = \frac{k}{n}$ das Vorzeichen von plus nach minus. Es liegt also tatsächlich ein Maximum vor. Für die Spezialfälle $k = 0, n$ argumentiert man etwas anders: Die Bernstein-Polynome nehmen auf $t \in [0,1]$ nur Werte aus dem Intervall $[0,1]$ an. Der maximale Wert 1 wird an der Stelle $t = 0$ bzw. $t = 1$ auch angenommen:

$$B_0^n(0) = 1, \quad B_n^n(1) = 1\,.$$

Lösung 11.12

Der Ansatz lautet

$$-1 + t + t^2 = \lambda_0\, B_0^2(t) + \lambda_1\, B_1^2(t) + \lambda_2\, B_2^2(t)$$

mit gesuchten Koeffizienten λ_0, λ_1 und λ_2. Aus der Darstellung

$$B_0^2(t) = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t) = 2t - 2t^2, \quad B_2^2(t) = t^2$$

folgt der Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{rcrcrcr} -1 & = & \lambda_0 & & & & \\ 1 & = & -2\lambda_0 & + & 2\lambda_1 & & \\ 1 & = & \lambda_0 & - & 2\lambda_1 & + & \lambda_2 \end{array}$$

und daraus die Lösung

$$\lambda_0 = -1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 1\,.$$

Lösung 11.13

a) Durch Einsetzen der Parameterwerte $t = 0$ und $t = 1$ erhält man Anfangs- und Endpunkt. Die Kurve startet in $(1\,|\,0)$ und endet in $(5\,|\,1)$.

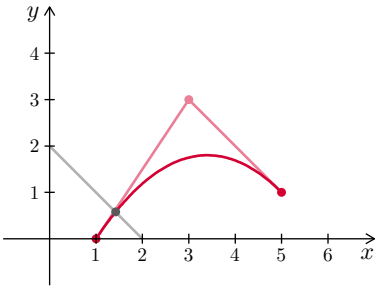
b) Aus

$$\boldsymbol{c}'(t) = -2(1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2(1-2t)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\boldsymbol{c}'(0) = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}'(1) = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

c) Im Schaubild sind Anfangs- und Endpunkt sichtbar. Auch sichtbar ist der dritte Kontrollpunkt. An den beiden Endpunkten verläuft die Kurve tangential zum Polygonzug durch die drei Kontrollpunkte.



d) Die Gerade kann man als parametrisierte Kurve

$$\boldsymbol{g}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

darstellen. Den Schnittpunkt berechnet man durch Gleichsetzen der beiden Kurven:

$$(1-t)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2(1-t)t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dieses System von zwei nichtlinearen Gleichungen in den beiden Unbekannten s und t

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & 4t & & = & & 2s \\ & & 6t & - & 5t^2 & = & 2 - 2s \end{array}$$

kann man durch Addition der beiden Gleichungen vereinfachen zu einer einzigen quadratischen Gleichung in t:

$$-5t^2 + 10t - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{-10} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Allerdings liegt nur der Parameterwert $t = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.1$ in der Definitionsmenge der Kurve. Daraus ergibt sich $s = \frac{5}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}}$ und der Schnittpunkt

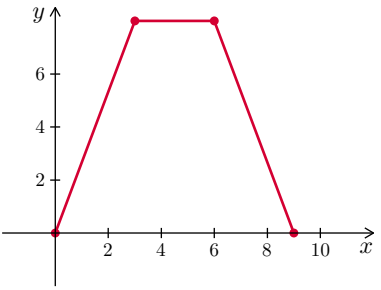
$$S\left(5 - \frac{8}{\sqrt{5}} \,\middle|\, -3 + \frac{8}{\sqrt{5}}\right).$$

Lösung 11.14

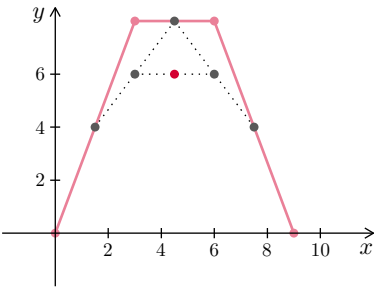
a) Gegeben sind die vier Kontrollpunkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Kontrollpolygon verbindet die Kontrollpunkte durch einen Polygonzug.



b) Der Kurvenpunkt zum Parameterwert $t = \frac{1}{2}$ kann man konstruktiv ermitteln. Zunächst verbindet man die Mittelpunkte der Kanten des Kontrollpolygons. Danach verbindet man wiederum die Mittelpunkte der beiden Verbindungskanten. Der Mittelpunkt der letzten Verbindungskante ist der gesuchte Punkt.



c) Da der erste Kontrollpunkt im Ursprung liegt, ergibt sich

$$\boldsymbol{c}(t) = 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit für die erste Ableitung

$$\boldsymbol{c}'(t) = 3\big(-2(1-t)t + (1-t)^2\big) \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\big(-t^2 + (1-t)2t\big) \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 3t^2 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

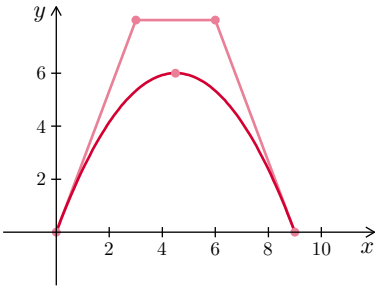
Für den Anfangspunkt gilt somit

$$\boldsymbol{c}'(0) = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$$

und für den Endpunkt

$$\boldsymbol{c}'(1) = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

d) Die Kurve verläuft im Anfangs- und Endpunkt tangential zum Polygonzug durch die Kontrollpunkte. Außerdem geht die Kurve durch den zeichnerisch bestimmten Punkt für den Parameterwert $t = \frac{1}{2}$. Da die Kontrollpunkte symmetrisch zu $x = \frac{9}{2}$ liegen, gilt dies auch für die Kurve.



Lösung 11.15

Die größte Reichweite wird benötigt, wenn sich das Fahrzeug in einem Scheitelpunkt mit großem Halbmesser befindet. Dann beträgt der Abstand zum gegenüberliegenden Brennpunkt

$$d = e + a = \sqrt{a^2 - b^2} + a = \sqrt{12500} + 150 = 50\sqrt{5} + 150\,.$$

Die Reichweite muss also mindestens $150 + \sqrt{5}\ \mathrm{m} \approx 262\ \mathrm{m}$ betragen.

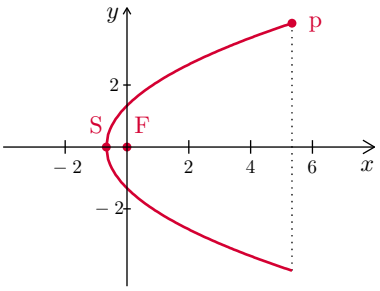
Lösung 11.16

Zunächst lautet der allgemeine Ansatz

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad , \quad p > 0 \quad .$$

Brennpunkt F, Scheitelpunkt S und oberer Endpunkt des Parabelbogens P haben gemäß den Angaben die Koordinaten

$$F(0\,|\,0), \quad S\left(-\frac{p}{2}\,\middle|\,0\right), \quad P\left(6 - \frac{p}{2}\,\middle|\,4\right).$$



Es ist also $x_0 = -\frac{p}{2}$ und $y_0 = 0$. Durch Einsetzen von P erhält man

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad 16 = 2p\left(6 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right) = 12p \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{4}{3}\,.$$

Die Parabel lautet also

$$y^2 = \frac{8}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right) \quad .$$

Lösung 11.17

a) Aus den Angaben kann man den Anfangsgierwinkel und die Gierrate entnehmen:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi'(t) = c > 0\,.$$

Für den Gierwinkel gilt somit durch Integration

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t c\,d\tau = \varphi_0 + ct = \frac{\pi}{2} + ct\,.$$

b) Die Geschwindigkeit setzt sich aus Betrag und Richtung zusammen:

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -\sin ct \\ \cos ct \end{pmatrix}.$$

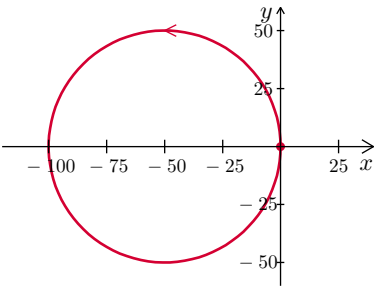
c) Für die Position integriert man die Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t v_x(\tau)\,d\tau \\ \int_0^t v_y(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} = \frac{w}{c} \begin{pmatrix} \cos ct - 1 \\ \sin ct \end{pmatrix}.$$

d) Mit $r = \frac{w}{c}$ und den Koordinaten $x = s_x$ und $y = s_y$ folgt die Gleichung

$$(x + r)^2 + y^2 = r^2 \cos^2 ct + r^2 \sin^2 ct = r^2\,.$$

Das Fahrzeug durchläuft somit eine stationäre Kreisfahrt mit $r = 50$ m und $M(-r\,|\,0)$.



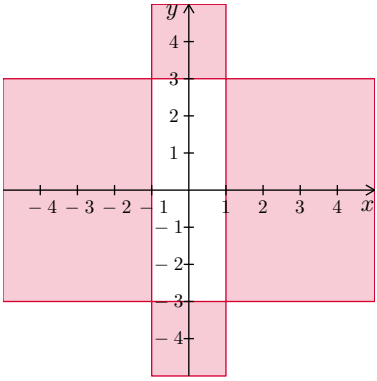
Lösung 11.18

Das Licht der Kerze erzeugt durch den Rand des Bechers einen Kegel. Eine senkrechte Wand schneidet diesen Kegel eben. Als berandende Kurve des Schattens entsteht dadurch ein Hyperbelast. Wird die Wand geneigt, entstehen zunächst ebenfalls Hyperbeläste, für eine bestimmte Neigung dann eine Parabel und danach Ellipsen. An einer waagrechten Decke entsteht schließlich ein Kreis.

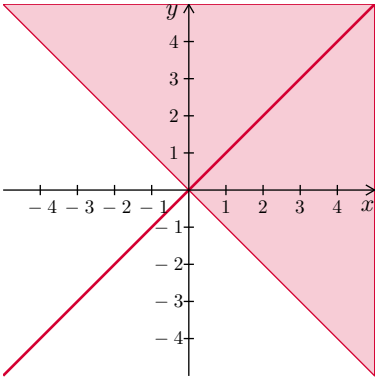
12 Funktionen mit mehreren Variablen

Lösung 12.1

a) Die Funktion ist nur dann definiert, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ wird. Entlang der beiden Geraden $x = \pm 1$ wird der erste Faktor 0 und entlang der beiden Geraden $y = \pm 3$ wird der zweite Faktor 0. Die x-y-Ebene wird durch diese Geraden in 9 Sektoren geteilt. Die Funktion ist in den vier rot markierten Bereichen definiert.



b) Die Funktion ist nur dann definiert, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ wird und im Nenner nicht durch 0 geteilt wird. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $y \geq -x$ und $x \neq y$ ist. Der Definitionsberecih besteht somit aus allen Zahlen, die auf oder oberhalb der zweiten Winkelhalbierenden liegen. Die Zahlen auf der ersten Winkelhalbierenden liegen aber nicht in der Definitionsmenge.



Lösung 12.2

a) $f_x(x,y) = 1$, $f_y(x,y) = 1$, $f_{xx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 0$, $f_{xy}(x,y) = 0$.

b) $f_x(x,y) = 6(3x-5y)$, $f_y(x,y) = -10(3x-5y)$,
$f_{xx}(x,y) = 18$, $f_{yy}(x,y) = 50$, $f_{xy}(x,y) = -30$.

c) $f_r(r,\varphi) = 3\,\mathrm{e}^{\varphi}$, $f_\varphi(r,\varphi) = 3\,r\,\mathrm{e}^{\varphi}$, $f_{rr}(r,\varphi) = 0$, $f_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 3\,r\,\mathrm{e}^{\varphi}$, $f_{r\varphi}(r,\varphi) = 3\,\mathrm{e}^{\varphi}$.

d) Durch die Umformungen

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

vereinfacht sich die Berechnung der partiellen Ableitungen.

$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_{yy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_{xy}(x,y) = \frac{-2\,xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

e) $f_t(t,\omega,\varphi) = \omega\,\cos(\omega\,t+\varphi)$, $f_\omega(t,\omega,\varphi) = t\,\cos(\omega\,t+\varphi)$, $f_\varphi(t,\omega,\varphi) = \cos(\omega\,t+\varphi)$,
$f_{tt}(t,\omega,\varphi) = -\omega^2\,\sin(\omega\,t+\varphi)$, $f_{\omega\omega}(t,\omega,\varphi) = -t^2\,\sin(\omega\,t+\varphi)$,
$f_{\varphi\varphi}(t,\omega,\varphi) = -\sin(\omega\,t+\varphi)$, $f_{t\omega}(t,\omega,\varphi) = \cos(\omega\,t+\varphi) - \omega\,t\,\sin(\omega\,t+\varphi)$,
$f_{t\varphi}(t,\omega,\varphi) = -\omega\,\sin(\omega\,t+\varphi)$, $f_{\omega\varphi}(t,\omega,\varphi) = -t\,\sin(\omega\,t+\varphi)$.

f) $f_x(x,y,z) = 2x\sin(y-z)$, $f_y(x,y,z) = x^2\cos(y-z)$, $f_z(x,y,z) = -x^2\cos(y-z)$,
$f_{xx}(x,y,z) = 2\sin(y-z)$, $f_{yy}(x,y,z) = -x^2\sin(y-z)$, $f_{zz}(x,y,z) = -x^2\sin(y-z)$,
$f_{xy}(x,y,z) = 2x\cos(y-z)$, $f_{xz}(x,y,z) = -2x\cos(y-z)$, $f_{yz}(x,y,z) = x^2\sin(y-z)$.

Lösung 12.3

Die Ableitungen erster Ordnung sind

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Der Ausdruck $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$ ergibt

$$\frac{-4x^2y^2 - (x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}.$$

Er lässt sich weiter vereinfachen zu

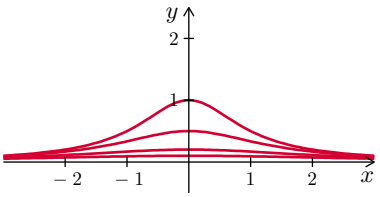
$$\frac{-4x^2y^2 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.$$

Lösung 12.4

a) Die Funktion ist für alle reellen Zahlen x und y definiert.

b) Schnittkurven mit den Ebenen parallel zu der x-z-Ebene erfüllen die Bedingung $y = c$, wobei c eine beliebige Konstante ist. Die Gleichung der Schnittkurven lautet somit

$$z = f(x) = \frac{1}{1+x^2+c^2}.$$



Die Schnittkurven mit den Ebenen parallel zu der y-z-Ebene ergeben sich analog. Die Höhenlinien

$$c = \frac{1}{1+x^2+y^2} \Longrightarrow x^2+y^2 = \frac{1-c}{c}$$

sind Ursprungskreise mit Radius $r = \sqrt{\frac{1-c}{c}}$, falls c zwischen 0 und 1 liegt. Die Fläche ist also eine Rotationsfläche mit z-Werten zwischen 0 und 1.

c) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Die Tangentialebene ist genau dann parallel zur x-y-Ebene, wenn beide partiellen Ableitungen 0 sind, also in $(x,y) = (0,0)$.

d) Das totale Differenzial von f im Punkt $P\left(1\,|\,1\,|\,\frac{1}{3}\right)$ ist $\mathrm{d}f = -\frac{2}{9}\mathrm{d}x - \frac{2}{9}\mathrm{d}y$. Die Abschätzung der Funktionsänderung mit dem totalen Differenzial ergibt

$$|\Delta f| \le \frac{2}{9}\,|\Delta x| + \frac{2}{9}\,|\Delta y| = \frac{1}{15} \approx 0.067.$$

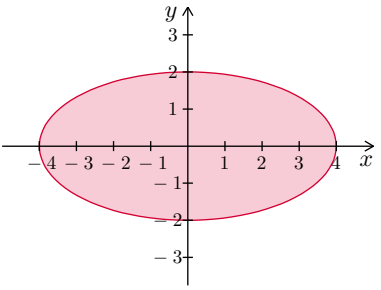
Lösung 12.5

a) Die Funktion f ist für alle x-Werte und y-Werte definiert, die die Bedingung $16 - x^2 - 4\,y^2 \ge 0$ erfüllen. Wir bestimmen zunächst alle Werte, für die der Ausdruck unter der Wurzel Null wird

$$16 - x^2 - 4\,y^2 = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Durch Vergleich mit der Scheitelgleichung einer Ellipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



erkennen wir, dass der Mittelpunkt der Ellipse im Ursprung liegt und die beiden Halbachse $a = 4$ und $b = 2$ sind. Die Definitionsmenge besteht aus allen Punkten (x, y), die innerhalb der Ellipse oder auf dem Rand der Ellipse liegen.

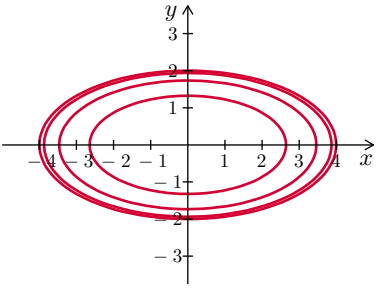
b) Die Höhenlinien ergeben sich aus

$$z = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2} \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 16 - z^2.$$

Die z-Werte 1, 2, 3 erzeugen Ellipsen um den Ursprung mit den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{15}, \quad a_2 = \sqrt{12}, \quad a_3 = \sqrt{7},$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{12}}{2}, \quad b_3 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$



c) Für die Tangentialebene im Punkt $P(\sqrt{3}\,|\,-1\,|\,3)$ berechnet man zunächst die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{-4y}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}.$$

Wir benötigen die Werte an der Stelle $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$

$$f_x(\sqrt{3}, -1) = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \quad f_y(\sqrt{3}, -1) = \frac{4}{3}.$$

Dadurch ergibt sich die Tangentialebene

$$g(x,y) = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{3}\right) + \frac{4}{3}(y+1).$$

d) Für die Richtungsableitung benötigen wir den Gradient von f an der Stelle $(\sqrt{3}, -1)$

$$\nabla f(\sqrt{3}, -1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsableitung berechnet man aus dem Skalarprodukt aus Gradient und normiertem Richtungsvektor

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(-\sqrt{3}\cdot 1 + 4\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) Den größten Wert hat die Richtungsableitung in Richtung des steilsten Anstiegs, also in Richtung des Gradienten. Somit gilt

$$\tan\varphi = -\frac{4}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) + \pi \approx 1.9794,$$

was einem Winkel von ungefähr $\varphi = 113.4°$ entspricht.

Lösung 12.6

Mit den partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y,z) = y + z, \quad f_y(x,y,z) = x + z, \quad f_z(x,y,z) = x + y,$$

ergibt sich

$$\mathrm{d}f = 4\,\mathrm{d}x + 3\,\mathrm{d}y + 5\,\mathrm{d}z.$$

Aus dem totalen Differenzial kann man die Funktionsänderung durch

$$|\Delta f| \le 4\cdot 0.1 + 3\cdot 0.2 + 5\cdot 0.2 = 2$$

schätzen. Die tatsächliche maximale Funktionsänderung ist

$$\Delta f = f(2.1, 3.2, 1.2) - f(2,3,1) = 13.08 - 11 = 2.08.$$

Lösung 12.7

a) Die Funktion der Fehlerquadrate ist

$$e(a_0,a_1,a_2) = (a_0 - a_1 + a_2 - 1)^2 + (a_0)^2 + (a_0 + a_1 + a_2 - 1)^2 + (a_0 + 2a_1 + 4a_2 - 3)^2.$$

Es ist hier nicht notwendig, die Klammern mit den Quadraten aufzulösen.

b) Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen müssen nach der Kettenregel die inneren Ableitungen beachtet werden.

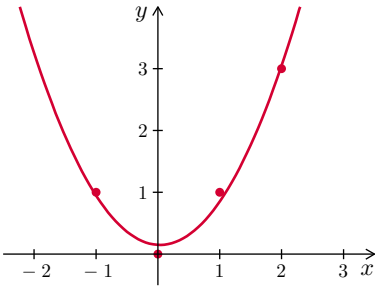
$$\begin{aligned} e_{a_0} &= 2(a_0 - a_1 + a_2 - 1) + 2a_0 + 2(a_0 + a_1 + a_2 - 1) + 2(a_0 + 2a_1 + 4a_2 - 3) \\ e_{a_1} &= -2(a_0 - a_1 + a_2 - 1) + 2(a_0 + a_1 + a_2 - 1) + 4(a_0 + 2a_1 + 4a_2 - 3) \\ e_{a_2} &= 2(a_0 - a_1 + a_2 - 1) + 2(a_0 + a_1 + a_2 - 1) + 8(a_0 + 2a_1 + 4a_2 - 3) \end{aligned}$$

Die Extremwerte von $e(a_0, a_1, a_2)$ findet man an den Punkten, an denen alle drei partiellen Ableitungen null sind

$$\begin{aligned} 8a_0 + 4a_1 + 12a_2 &= 10, \\ 4a_0 + 12a_1 + 16a_2 &= 12, \\ 12a_0 + 16a_1 + 36a_2 &= 28. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung

$$a_0 = \frac{3}{20}, \quad a_1 = -\frac{1}{20}, \quad a_2 = \frac{3}{4}.$$



c) Die Funktionsgleichung der Ausgleichsparabel lautet

$$f(x) = \frac{3}{20} - \frac{1}{20}x + \frac{3}{4}x^2.$$

Man kann die Ausgleichsparabel auch durch Lösen von $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ berechnen, mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung 12.8

a) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ und der Vektor $\boldsymbol{b}$ ergeben sich durch Einsetzen der vier Punkte in $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{00} \\ 1 &= a_{00} + a_{10} \\ 2 &= a_{00} + a_{01} \\ 4 &= a_{00} + a_{10} + a_{01} \end{aligned} \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Durch Multiplikation mit der transponierten Matrix ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow f(x, y) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y.$$

b) Die Summe der Fehlerquadrate ist

$$(f(0,0) - 0)^2 + (f(1,0) - 1)^2 + (f(0,1) - 2)^2 + (f(1,1) - 4)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Lösung 12.9

Die partiellen Ableitungen

$$V_r = 2\,\pi\,r\,h, \quad V_h = \pi\,r^2,$$

ergeben das totale Differenzial

$$\mathrm{d}V = 2\,\pi\,r\,h\,\Delta r + \pi\,r^2\,\Delta h.$$

Für den maximalen relativen Fehler verwenden wir die Abschätzung

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le \frac{|2\,\pi\,r\,h|}{|\pi\,r^2\,h|}|\Delta r| + \frac{|\pi\,r^2|}{|\pi\,r^2\,h|}|\Delta h| = 2\frac{|\Delta r|}{r} + \frac{|\Delta h|}{h}.$$

Für den relativen Fehler von r und h erhalten wir, wie erwartet, die konstanten Verstärkungsfaktoren 2 und 1. Die Zahlenwerte ergeben

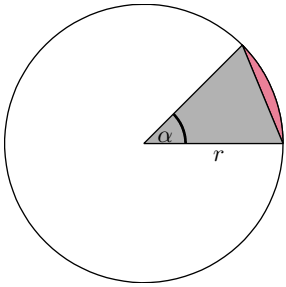
$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le 2\frac{|10^{-2}|}{50} + \frac{|10^{-2}|}{50} = 6\cdot 10^{-4}.$$

Es ergibt sich also ein relativer Fehler von ungefähr 0.06%.

Lösung 12.10

Die Formel für das Gewicht entsteht im Wesentlichen aus der Formel für die Fläche eines Kreissegmentes. Zunächst leiten wir die Formel für die Fläche eines Kreissegmentes her. Die Fläche einer Kreisscheibe ist πr^2. Die Fläche A_S des Kreissektors mit dem Winkel α berechnet man aus der Beziehung

$$\frac{A_S}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Longrightarrow A_S = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$



Dabei ist zu beachten, dass α im Bogenmaß angegeben ist. Für die Fläche des Kreissegmentes muss man die Dreieckfläche abziehen. Das Dreieck hat eine Grundseite der Länge r, die Höhe $r\sin\alpha$ und somit die Fläche $A_D = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$. Das Kreissegment hat also die Fläche $A = A_S - A_D = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$.

a) Die partiellen Ableitungen

$$G_\gamma = \frac{1}{2}Dr^2(\alpha-\sin\alpha), \quad G_r = \gamma Dr(\alpha-\sin\alpha), \quad G_D = \frac{1}{2}\gamma r^2(\alpha-\sin\alpha), \quad G_\alpha = \frac{1}{2}\gamma Dr^2(1-\cos\alpha),$$

ergeben das totale Differenzial

$$\mathrm{d}G = \frac{1}{2}Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\mathrm{d}\gamma + \gamma Dr(\alpha-\sin\alpha)\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\gamma r^2(\alpha-\sin\alpha)\mathrm{d}D + \frac{1}{2}\gamma Dr^2(1-\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

Für den maximalen relativen Fehler verwenden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta G}{G}\right| \le{}& \frac{\left|\frac{1}{2}Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}{\left|\frac{1}{2}\gamma Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}|\Delta\gamma| + \frac{|\gamma Dr(\alpha-\sin\alpha)|}{\left|\frac{1}{2}\gamma Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}|\Delta r| + \\ &\frac{\left|\frac{1}{2}\gamma r^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}{\left|\frac{1}{2}\gamma Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}|\Delta D| + \frac{\left|\frac{1}{2}\gamma Dr^2(1-\cos\alpha)\right|}{\left|\frac{1}{2}\gamma Dr^2(\alpha-\sin\alpha)\right|}|\Delta\alpha|\end{aligned}$$

und erhalten

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| \leq \left|\frac{\Delta \gamma}{\gamma}\right| + 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{1-\cos\alpha}{\alpha-\sin\alpha}\right| |\Delta\alpha| .$$

Für den relativen Fehler von γ, r und D erhalten wir, wie erwartet, die konstanten Verstärkungsfaktoren 1, 2 und 1. Die Verstärkung des relativen Fehlers von α ist nicht konstant. Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\alpha = 0.05\frac{\pi}{180}$ ergibt sich ungefähr

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| \leq 0.002 + 0.001 + 0.05 + 3 \cdot 0.001 = 0.056.$$

Wir müssen also damit rechnen, dass der relative Fehler des Gewichtes rund 5% beträgt.

b) Der Fehler lässt sich am ehesten verbessern, wenn die Blechdicke D genauer gemessen wird. Selbst wenn γ, r und α keinen Messfehler aufweisen, erzeugt der Messfehler der Blechdicke noch einen relativen Fehler von 5%.

Lösung 12.11

Die Oberfläche berechnet man nach der Formel

$$O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Die partiellen Ableitungen

$$O_r(r,h) = 4\pi r + 2\pi h, \quad O_h(r,h) = 2\pi r$$

ergeben für $r = 10$ und $h = 25$ das totale Differenzial

$$\mathrm{d}O = 90\pi \mathrm{d}r + 20\pi \mathrm{d}h.$$

Für die relative Änderung der Oberfläche ergibt sich näherungsweise

$$\frac{\Delta O}{O} \approx \frac{90\pi\Delta r + 20\pi\Delta h}{200\pi + 500\pi} = \frac{90\cdot 0.5 - 20\cdot 0.5}{700} = \frac{1}{20} = 5\%.$$

Die exakte relative Oberflächenänderung beträgt

$$\frac{\Delta O}{O} = \frac{O(10.5, 24.5) - O(10,25)}{O(10,25)} = \frac{2\pi\cdot 10.5\cdot 35 - 2\pi\cdot 10\cdot 35}{2\pi\cdot 10\cdot 35} = \frac{0.5}{10} = 5\%.$$

Die näherungsweise Berechnung mit dem totalen Differenzial liefert in diesem Beispiel genau dasselbe Ergebnis wie die exakte Rechnung.

13 Komplexe Zahlen und Funktionen

Lösung 13.1

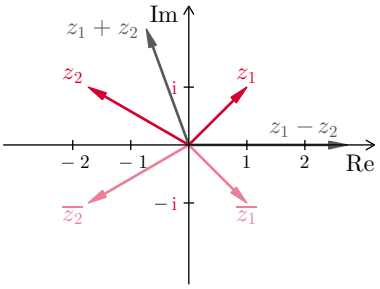
a) Die Zahl

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}$$

liegt im ersten und die Zahl

$$z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$$

liegt im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene.



b) Die grafischen Lösungen sind in der Skizze aus Aufgabenteil a) enthalten. Rechnerisch erhalten wir

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 1 - \sqrt{3} + 2\mathrm{i}\,, & \overline{z_1} &= 1 - \mathrm{i}\,, \\ z_1 - z_2 &= 1 + \sqrt{3}\,, & \overline{z_2} &= -\sqrt{3} - \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

c) Das Produkt von z_1 und z_2 erhält man durch Ausmultiplizieren der Ausdrücke:

$$z_1 \cdot z_2 = (1+\mathrm{i}) \cdot (-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \underbrace{\left(-\sqrt{3}-1\right)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\left(1-\sqrt{3}\right)}_{\text{Imaginärteil}}\,\mathrm{i}\,.$$

Brüche mit komplexem Nenner macht man durch konjugiert komplexes Erweitern reell:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i}) \cdot (-\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) \cdot (-\sqrt{3}-\mathrm{i})} = \underbrace{\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{3}\right)}_{\text{Imaginärteil}}\,\mathrm{i}\,.$$

Ganz analog geht man für den Kehrwert vor:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) \cdot (1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i}) \cdot (1-\mathrm{i})} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}_{\text{Imaginärteil}}\,\mathrm{i}.$$

d) Argument und Betrag von z_1 können mit den entsprechenden Formeln bestimmt werden:

$$\arg(z_1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad |z_1| = \sqrt{2}, \quad \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,.$$

Analog erhalten wir für z_2

$$\arg(z_2) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}, \quad |z_2| = 2, \quad \Longrightarrow z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\,.$$

e) Potenzen berechnet man am einfachsten in Exponentialform:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= 2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i\,, & z_2^2 &= 4\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2-2\sqrt{3}i\,,\\ z_1^3 &= 2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = -2+2i\,, & z_2^3 &= 8\cdot e^{i\frac{15\pi}{6}} = 8i\,,\\ z_1^4 &= 4\cdot e^{i\pi} = -4\,, & z_2^4 &= 16\cdot e^{i\frac{10\pi}{3}} = -8-8\sqrt{3}i\,. \end{aligned}$$

f) Die Zahl

$$z_1^n = \sqrt{2^n}\cdot e^{i\frac{n\cdot\pi}{4}}$$

ist genau dann eine reelle Zahl, wenn $\dfrac{n\cdot\pi}{4}$ ein Vielfaches von π ist, also

$$\frac{n\cdot\pi}{4} = k\cdot\pi \quad\Longrightarrow\quad n = 4\cdot k,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Die gesuchten natürlichen Zahlen sind also

$$n = 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\,.$$

Analog ist die Zahl

$$z_2^m = 2^m\cdot e^{i\frac{m\cdot 5\pi}{6}}$$

genau dann eine reelle Zahl, wenn $\dfrac{m\cdot 5\pi}{6}$ ein Vielfaches von π ist, also

$$\frac{m\cdot 5\pi}{6} = k\cdot\pi \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{6}{5}\cdot k,\quad k = 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots$$

Die gesuchten natürlichen Zahlen sind also

$$m = 0, 6, 12, 18, 24, \ldots\,.$$

Lösung 13.2

a) $z = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ b) $z = 3\,e^{i\pi}$ c) $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

Lösung 13.3

Die komplexe Zahl $0.815 + 0.4711\,i$ hat einen Winkel von ungefähr $\dfrac{\pi}{6}$. Die erste Lösung liegt somit im ersten Quadranten bei einem Winkel von ungefähr $\dfrac{\pi}{18}$. Die beiden weiteren Lösungen liegen im zweiten und dritten Quadranten.

Lösung 13.4

Mit der Linearfaktorzerlegung des Polynoms erhalten wir

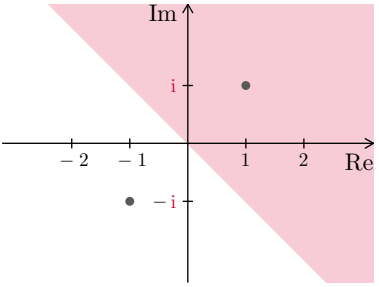
$$p(z) = (z-1)(z+2-i)(z+2+i) = (z-1)\left(z^2+4z+5\right) = -5+z+3z^2+z^3\,.$$

Lösung 13.5

a) Aus der Darstellung

$$|z-(1+\mathrm{i})| < |z-(-1-\mathrm{i})|$$

kann man direkt ablesen, dass Punkte z, die diese Bedingung erfüllen, einen geringeren Abstand zu $1+\mathrm{i}$ als zu $-1-\mathrm{i}$ haben. Das sind genau diejenigen Punkte in der Gaußschen Zahlebene, die oberhalb der zweiten Winkelhalbierenden liegen.
Bei der rechnerischen Lösung verwendet man $z = x+\mathrm{i}y$ und erhält



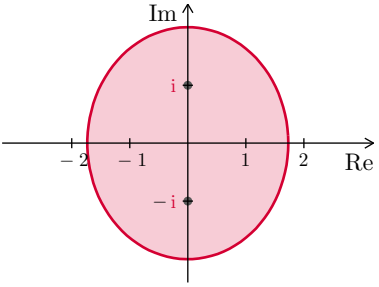
$$|x-1+\mathrm{i}(y-1)| < |x+1+\mathrm{i}(y+1)| \implies \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\,.$$

Durch Quadrieren, Ausmultiplizieren und Kürzen ergibt sich dann $y > -x$.

b) Die Formulierung

$$|z-\mathrm{i}| + |z-(-\mathrm{i})| \le 4$$

entspricht der geometrischen Definition einer Ellipse. Gesucht sind diejenigen Punkte in der komplexen Ebene, bei denen die Summe der beiden Abstände zu i und $-\mathrm{i}$ kleiner gleich 4 ist. Das sind genau die Punkte die innerhalb einer Ellipse mit Brennpunkten i und $-\mathrm{i}$ und den Halbachsen $a = \sqrt{3}$ und $b = 2$ liegen.
Die rechnerische Lösung mit $z = x+\mathrm{i}y$ ist wesentlich komplizierter:



$$|x+\mathrm{i}(y-1)| + |x+\mathrm{i}(y+1)| \le 4 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} \le 4\,.$$

Durch Quadrieren lassen sich nicht beide Wurzeln in einem Schritt beseitigen:

$$x^2+(y-1)^2 \le 16 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2} + x^2 + (y+1)^2 \Longrightarrow -4y-16 \le -8\sqrt{x^2+(y+1)^2}\,.$$

Kürzen mit -4 und nochmaliges Quadrieren ergibt

$$y+4 \ge 2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad y^2+8y+16 \ge 4x^2+4y^2+8y+4\,.$$

Durch Zusammenfassen erhält man die Normalform der Ellipsengleichung

$$4x^2+3y^2 \le 12 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} \le 1\,.$$

c)

Der Realteil von z entspricht anschaulich dem Abstand zur imaginären Achse. Wir suchen also alle Punkte in der komplexen Ebene, deren Abstand vom Punkt -1 gleich dem Abstand zur imaginären Achse ist. Das entspricht genau der geometrischen Definition einer Parabel mit Brennpunkt -1 und Leitgerade auf der imaginären Achse.
Die rechnerische Lösung mit $z = x + \mathrm{i}y$ ist hier auch nicht kompliziert:

$$|x+1+\mathrm{i}y| = |x| \implies \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2}\,.$$

Durch Quadrieren entsteht die Lösung:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(-1-y^2\right)\,.$$

Lösung 13.6

a) Durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl im Nenner ergibt sich

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\,\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,.$$

b) Einheitliches Schreiben in kartesischer Form liefert

$$z = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})} = \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5}(2-\mathrm{i})\,.$$

Die Zahl in Exponentialschreibweise lautet $z = \dfrac{\sqrt{10}}{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{-1}{2}}$.

c) Durch Einführen des Hauptnenners erhält man die Lösung:

$$z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} - \frac{1+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) - (1+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{-1-3\mathrm{i}-(-5+5\mathrm{i})}{5} = \frac{4-8\mathrm{i}}{5}\,.$$

Damit ist $z = \dfrac{4}{5}(1-2\mathrm{i}) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(-2)}$.

d) Die kartesische Form lautet

$$z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\,.$$

e) Hier ist zu beachten, dass das negative Vorzeichen in der Exponentialform nicht enthalten ist. Die Zahl z ist rein imaginär:

$$z = -5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 5\mathrm{i} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,.$$

f) Die Zahl z ist rein reell:

$$z = 7\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -7\,.$$

Lösung 13.7

a) Die Exponentialform erhält man am einfachsten durch Darstellung des Zählers ebenfalls in Exponentialform. Die kartesische Form entsteht durch Ausmultiplizieren.

$$z = \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^{10} = \left(\frac{5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}}}{5}\right)^{10} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,10\arctan\frac{4}{3}} = \frac{-9653287+1476984\,\mathrm{i}}{9765625}\,.$$

b) Mittels Hauptnenner und Erweitern des konjugiert komplexen des Hauptnenners ergibt sich

$$z = \left(\mathrm{i}+\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^6 = \left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^6 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}\,.$$

c) Durch Umschreiben in Exponentialform entsteht

$$z = \left((1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^9 = 16\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 16(-1+\mathrm{i})\,.$$

Lösung 13.8

Zunächst kann man auf der rechten Seite die Exponentialform herstellen:

$$A\left(\frac{1+3\,\mathrm{i}}{1-2\,\mathrm{i}}\right)^2 = A\left(\frac{(1+3\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})}{(1-2\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})}\right)^2 = A\left(\frac{5\mathrm{i}-5}{5}\right)^2 = A\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = A\cdot 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\,.$$

Aus dem Vergleich von linker mit rechter Seite erhalten wir für $A>0$

$$4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = 2\,A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \quad\Longrightarrow\quad A=2,\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

oder alternativ für $A<0$

$$4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = 2\,(-A)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \quad\Longrightarrow\quad A=-2,\quad \varphi = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

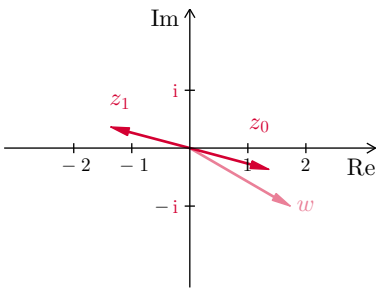
Lösung 13.9

a) Zur Lösung der Gleichungen schreibt man sowohl z als auch die rechte Seite in Exponentialform:

$$z^2 = \sqrt{3}-\mathrm{i} \quad\Longrightarrow\quad \left(r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 = 2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,.$$

Die beiden Lösungen sind dann

$$z_k = \sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+k\pi},\quad k=0,1\,.$$

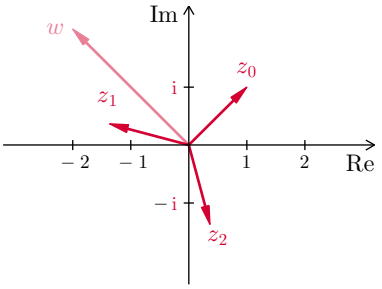


b) In Exponentialform lautet die gegebene Gleichung $z^3 = \dfrac{-4}{1+\mathrm{i}}$ folgendermaßen:

$$\left(r\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^3 = \frac{-4}{\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{\pi}{4}} .$$

Die drei Lösungen lauten also

$$z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+2k\frac{\pi}{3}}, \quad k = 0,1,2 .$$

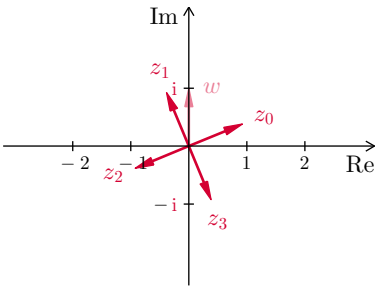


c) Setzt man in der gegebenen komplexen Gleichung $z^4 = \dfrac{1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$ die Exponentialform ein, so erhält man

$$\left(r\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^4 = \frac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \mathrm{i} .$$

Hieraus folgen die vier Lösungen

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}}, \quad k = 0,1,2,3 .$$



Lösung 13.10

Für $z = 2$ ergibt sich

$$2^4 - 2\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 8 = 0.$$

Genauso ist auch

$$(-2)^4 - 2\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 8 = 0.$$

Also sind $z_1 = 2$ und $z_2 = -2$ zwei Nullstellen, und die Polynomdivision

$$(z^4 - 2z^3 - 2z^2 + 8z - 8) : (z^2 - 4) = z^2 - 2z + 2$$

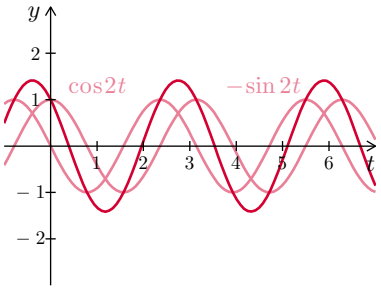
muss ohne Rest aufgehen. Die beiden restlichen Nullstellen sind

$$z_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}.$$

Lösung 13.11

a)

Der ersten Schwingung $\cos 2t$ ordnen wir den Zeiger $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}$ zu, der zweiten Schwingung $-\sin 2t = \cos(2t+\frac{\pi}{2})$ ordnen wir den Zeiger $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ zu. Die Addition der beiden Zeiger ergibt



$$z_1 + z_2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \cos 2t - \sin 2t &= \sqrt{2}\cos\left(2t + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(2\left(t + \tfrac{\pi}{8}\right)\right) \ . \end{aligned}$$

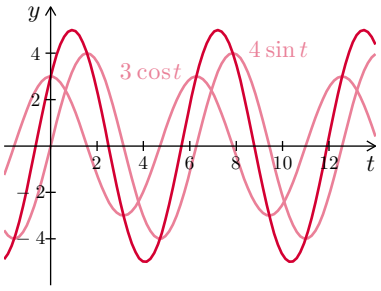
Die Nullstellen N_k der Gesamtschwingung liegen bei

$$N_k\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\,\middle|\,0\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

und die Hochpunkte H_k und Tiefpunkte T_k jeweils in der Mitte von zwei Nullstellen

$$H_k\left(\frac{7\pi}{8} + k\pi\,\middle|\,\sqrt{2}\right), \quad T_k\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\,\middle|\,-\sqrt{2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ .$$

b) Der ersten Schwingung $3\cos t$ ordnen wir den Zeiger $z_1 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}$ zu, der zweiten Schwingung $4\sin t = 4\cos(t-\frac{\pi}{2})$ ordnen wir den Zeiger $z_2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ zu. Die Addition der beiden Zeiger ergibt



$$z_1 + z_2 = 3 - 4\mathrm{i} = 5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\frac{4}{3}} \ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} 3\cos t + 4\sin t &= 5\cos\left(t - \arctan\tfrac{4}{3}\right) \\ &\approx 5\cos\left(t - 53^\circ\right) \ . \end{aligned}$$

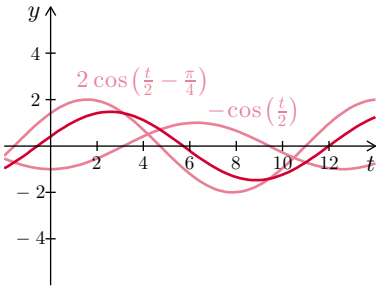
Die Nullstellen N_k der Gesamtschwingung liegen bei

$$N_k\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{4}{3} + k\pi\,\middle|\,0\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

und die Hochpunkte H_k und Tiefpunkte T_k jeweils in der Mitte von zwei Nullstellen

$$H_k\left(\arctan\frac{4}{3} + 2k\pi\,\middle|\,5\right), \quad T_k\left(\arctan\frac{4}{3} + \pi + 2k\pi\,\middle|\,-5\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ .$$

c) Der ersten Schwingung $2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ordnen wir den Zeiger $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ zu, der zweiten Schwingung $-\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ ordnen wir den Zeiger $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ zu. Die Addition der beiden Zeiger ergibt



$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} - 1 \\ &= \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} \ . \end{aligned}$$

Somit ist

$$2\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{5-2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{2}-\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)\approx 1.5\cos\left(\frac{t}{2}-30^\circ\right).$$

Die Nullstellen N_k der Gesamtschwingung liegen bei

$$N_k\left(\pi+2\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+2k\pi\,\middle|\,0\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

und die Hochpunkte H_k und Tiefpunkte T_k jeweils in der Mitte von zwei Nullstellen

$$H_k\quad\left(2\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+4k\pi\,\middle|\,\sqrt{5-2\sqrt{2}}\right),$$

$$T_k\quad\left(2\pi+2\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+4k\pi\,\middle|\,-\sqrt{5-2\sqrt{2}}\right).$$

$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$.

d) Der ersten Schwingung $\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$ ordnen wir den Zeiger $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ zu, der zweiten Schwingung

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$$

ordnen wir den Zeiger $z_2=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ zu. Die Addition der beiden Zeiger ergibt

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}+1-\sqrt{3}\mathrm{i}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{20-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{5\pi}{6}\right)&=\frac{1}{2}\sqrt{20-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\arctan\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right)\\&\approx 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-31^\circ\right).\end{aligned}$$

Die Nullstellen N_k der Gesamtschwingung liegen bei

$$N_k\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}+1+2k\,\middle|\,0\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

und die Hochpunkte H_k und Tiefpunkte T_k jeweils in der Mitte von zwei Nullstellen

$$H_k\quad\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}+4k\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{20-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\right),$$

$$T_k\quad\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}+2+4k\,\middle|\,-\frac{1}{2}\sqrt{20-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\right).$$

$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Lösung 13.12

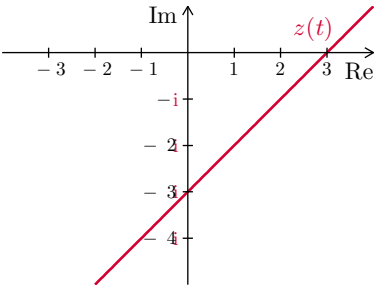
a) Die Ortskurve $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit

$$z(t) = t + \mathrm{i}(t-3)$$

hat den Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= t-3 \end{aligned}$$

und beschreibt eine Gerade.



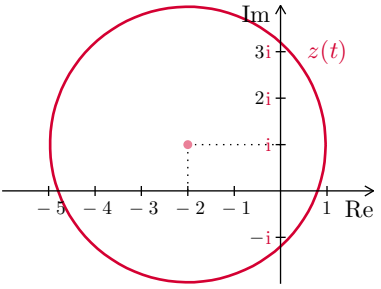
b) Die Ortskurve $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit

$$z(t) = -2 + \mathrm{i} + 3\cos t + 3\,\mathrm{i}\sin t$$

hat den Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + 3\cos t \\ y(t) &= 1 + 3\sin t \end{aligned}$$

und beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(-2\,|\,1)$ und Radius 3.



c) Die Ortskurve $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit

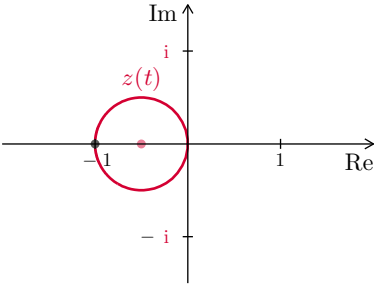
$$z(t) = \frac{\mathrm{i}\,t}{2 - \mathrm{i}\,t}$$

hat den Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-t^2}{4+t^2} \\ y(t) &= \frac{2t}{4+t^2} \end{aligned}$$

und erfüllt damit

$$x^2 + y^2 = \frac{t^4 + 4t^2}{(4+t^2)^2} = \frac{t^2}{4+t^2}\,.$$



Ersetzt man nun den Ausdruck auf der rechten Seite durch $-x$ und eliminiert damit t, so folgt

$$x^2 + y^2 = -x \quad\Longrightarrow\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Damit beschreibt die Ortskurve einen Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\frac{1}{2}\,|\,0\right)$ und Radius $\frac{1}{2}$. Der Punkt $(-1\,|\,0)$ ist nicht in der Ortskurve enthalten.

d)

Die Ortskurve $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit

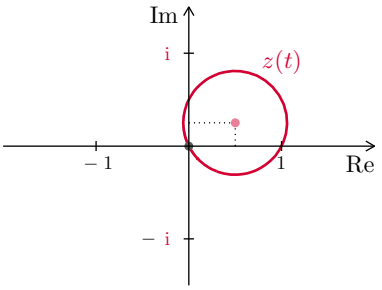
$$z(t) = \frac{\mathrm{i}+2}{2-\mathrm{i}\,t}$$

hat den Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4-t}{4+t^2} \\ y(t) &= \frac{2+2t}{4+t^2} \end{aligned}$$

und erfüllt damit

$$x^2+y^2 = \frac{(4-t)^2+(2+2t)^2}{(4+t^2)^2} = \frac{5}{4+t^2}\,.$$



Ersetzt man nun den Ausdruck auf der rechten Seite durch Terme in x und y und eliminiert damit t, so folgt

$$x^2+y^2 = x+\frac{y}{2} \quad\Longrightarrow\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}\,.$$

Damit beschreibt die Ortskurve einen Kreis mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}\,|\,\frac{1}{4}\right)$ und Radius $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Der Ursprung ist nicht in der Ortskurve enthalten.

Lösung 13.13

Die Transformation kann mit $z = x + \mathrm{i}y$ als

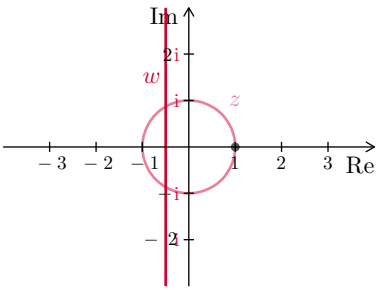
$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y-1}$$

geschrieben werden. Durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Ausdruck im Nenner folgt wegen $x^2+y^2 = 1$

$$f(z) = \frac{x-1-\mathrm{i}y}{x^2-2x+1+y^2} = \frac{x-1-\mathrm{i}y}{2-2x}$$

und damit

$$f(z) = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{y}{2x-2}\,.$$



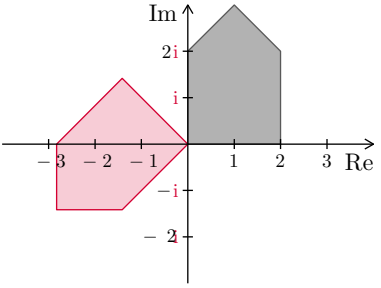
Das Bild des Einheitskreises ohne den Punkt $(1\,|\,0)$ ist die senkrechte Gerade mit $\mathrm{Re}(f(z)) = -\frac{1}{2}$.

Lösung 13.14

Die Multiplikation mit

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

entspricht einer Rotation um den Ursprung mit dem Winkel $\frac{3\pi}{4}$.



Lösung 13.15

Aus der Darstellung

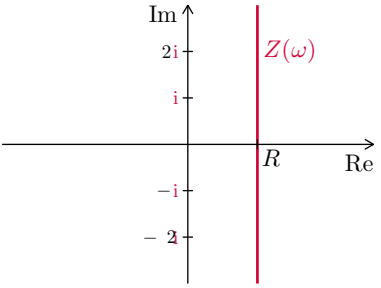
$$Z(\omega)=Z_R+\frac{Z_C\,Z_L}{Z_C+Z_L}$$

folgt durch Einsetzen von Z_R, Z_C und Z_L

$$Z(\omega)=R+\frac{\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\cdot\mathrm{i}\omega L}{\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}+\mathrm{i}\omega L}$$

und daraus durch Umformen

$$Z(\omega)=R+\frac{L}{\mathrm{i}\omega CL+\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}}=R+\frac{\mathrm{i}\omega L}{1-\omega^2CL}\,.$$



Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{Re}\,(Z(\omega))=R,\quad \mathrm{Im}\,(Z(\omega))=\frac{\omega L}{1-\omega^2CL},\quad |Z(\omega)|=\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{(1-\omega^2CL)^2}}\,.$$

Zur Bestimmung der Ortskurve setzen wir

$$w=u+\mathrm{i}v=R+\frac{\mathrm{i}\omega L}{1-\omega^2CL}\,.$$

Damit ist $u=R$. Alle Werte $Z(\omega)$ liegen auf der Parallelen zur imaginären Achse durch R. Dabei werden alle Geradenpunkte durchlaufen: Die quadratische Gleichung aus

$$v=\frac{\omega L}{1-\omega^2CL}\quad\Longrightarrow\quad v-\omega^2CLv=\omega L\quad\Longrightarrow\quad vCL\omega^2+L\omega-v=0$$

besitzt für alle v Lösungen, nämlich

$$\omega_{1,2}=\frac{-L\pm\sqrt{L^2+4v^2CL}}{2vCL}\,.$$

Für $\omega\to\frac{1}{\sqrt{CL}}$ geht $|Z(\omega)|$ gegen ∞.

14 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Lösung 14.1

a) $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

b) $x(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}\,t) + C_2 \cos(\sqrt{2}\,t)$

c) Die Lösung ergibt sich durch zweifaches Integrieren.

$$f(x) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

Es stellt sich die Frage, ob es sich bei diesem Beispiel tatsächlich um eine Differenzialgleichung handelt. Formal ist es eine lineare inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

Lösung 14.2

a) Durch Ableiten ergibt sich:

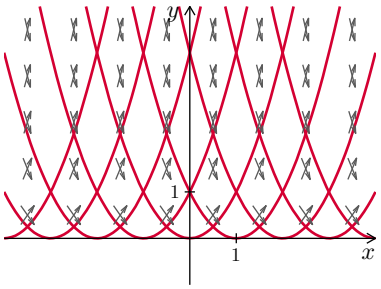
$$y'(x) = 2(x - C).$$

Aus dieser Gleichung für die Ableitung und der ursprünglichen Gleichung

$$y(x) = (x - C)^2$$

kann man die Konstante C eliminiert:

$$x - C = \frac{y'(x)}{2}, \quad x - C = \pm\sqrt{y(x)}$$



Dadurch ergibt sich die gesucht Differenzialgleichung:

$$y'(x) = \pm 2\sqrt{y(x)}.$$

Die Kurven sind Parabeln mit Scheiteln auf der x-Achse. Durch jeden Punkt der oberen Halbebene verlaufen zwei unterschiedliche Parabeln. Entsprechend lässt sich die Kurvenschar auch nicht durch eine einzige Differenzialgleichung beschreiben, sondern auf Grund von $y'(x) = \pm\ldots$ durch zwei Differenzialgleichungen. Das Richtungsfeld mit positiver Steigung erzeugt die rechten Teile der Parabeln und das Richtungsfeld mit negativer Steigung die linken Teile.

b)

Aus der Gleichung für die Ableitung

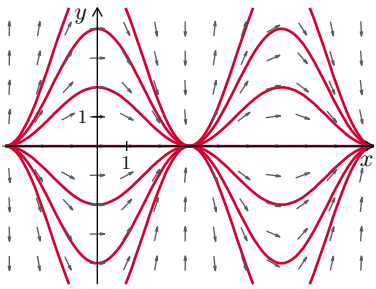
$$y'(x) = -C \sin x$$

und der ursprünglichen Gleichung

$$y(x) = C\,(1 + \cos x)$$

kann man C eliminieren

$$C = -\frac{y'(x)}{\sin x}, \quad C = \frac{y(x)}{1 + \cos x}.$$



Die gesuchte Differenzialgleichung lautet

$$y'(x) = -\frac{y(x)\,\sin x}{1 + \cos x}.$$

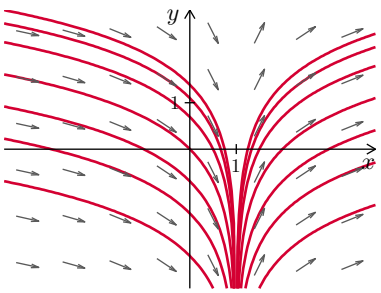
c) Verwendet man die Darstellung

$$y(x) = \ln(C(x-1)) = \ln C + \ln(x-1)$$

und leitet nach x ab

$$y'(x) = \frac{1}{x-1},$$

dann ergibt sich sofort die gesucht Differenzialgleichung, denn die Konstante C ist bereits eliminiert.



Lösung 14.3

a) Die Kurven sind Geraden. Durch Ableiten der Gleichung ergibt sich die Differenzialgleichung

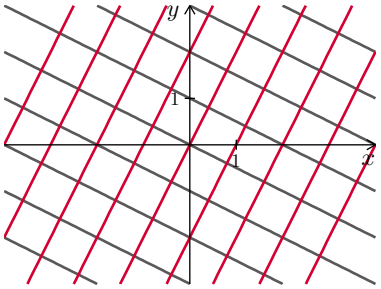
$$1 + 2y'(x) = 0 \Longrightarrow y'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorie lautet

$$y'(x) = 2.$$

Diese Differenzialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = 2x + \tilde{C}.$$



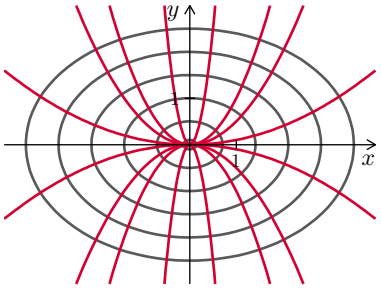
Das Ergebnis konnte man ohne Rechnung erahnen: Die Orthogonaltrajektorien der Geraden mit Steigung $-\frac{1}{2}$ sind die Geraden mit Steigung 2.

b) Die Kurven sind Ellipsen mit Mittelpunkt im Ursprung. Durch Ableiten der Gleichung ergibt sich

$$2x + 4y(x)y'(x) = 0.$$

Aus der ursprünglichen Differenzialgleichung ergibt sich die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorie

$$y'(x) = -\frac{x}{2\,y(x)} \Longrightarrow y'(x) = \frac{2\,y(x)}{x}.$$

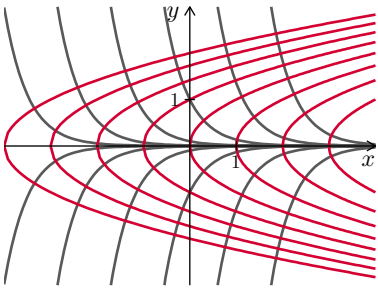


Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorie löst man durch Separation

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{2y(x)}{x} \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}\,y = 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \Longrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \tilde{C} \Longrightarrow y = \pm \mathrm{e}^{\tilde{C}} x^2.$$

Die Orthogonaltrajektorien der Ellipsen sind also Parabeln mit Scheitel im Ursprung.

c) Die Kurven sind Exponentialfunktionen. Durch Ableiten der Gleichung ergibt sich



$$y'(x) = -2\,C\,\mathrm{e}^{-2\,x}.$$

Nun muss man noch C eliminieren.

$$y'(x) = -2\,\frac{y(x)}{\mathrm{e}^{-2\,x}}\cdot\mathrm{e}^{-2\,x} = -2\,y(x).$$

Aus dieser Differenzialgleichung ergibt sich die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorie

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)}.$$

Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorie löst man durch Separation

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{2y(x)} \Longrightarrow 2\int y\,\mathrm{d}\,y = \int \mathrm{d}\,x \Longrightarrow y^2 = x + \tilde{C} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x+\tilde{C}}.$$

Die Orthogonaltrajektorien der Exponentialfunktionen sind also Wurzeln.

Lösung 14.4

Zunächst wird jeweils die homogene Differenzialgleichung betrachtet und das zugehörige charakteristische Polynom bestimmt.

a) Die Differenzialgleichung ist homogen:

$$\lambda^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad y(x) = c_1 + c_2 x$$

Zur Bestimmung der Lösung könnte man hier auch einfach y'' zweimal integrieren.

b) Die Differenzialgleichung ist inhomogen. Auf der rechten Seite steht ein Polynom, das zugeordnete λ ist demnach $\lambda_R = 0$. Es liegt doppelte Resonanz vor:

$$\lambda^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_h(x) = c_1 + c_2 x$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2\,, \quad y_p'(x) = 2Ax\,, \quad y_p''(x) = 2A$$

und erhalten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$A\,x^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad y_p(x) = \frac{1}{2}\,x^2$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}\,x^2$$

Zur Bestimmung der Lösung könnte man hier auch einfach y'' zweimal integrieren.

c) Auch diese Differenzialgleichung ist inhomogen. Auf der rechten Seite steht ein Polynom, das zugeordnete λ ist demnach $\lambda_R = 0$. Es liegt doppelte Resonanz vor:

$$\lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(x) = c_1 + c_2 x$$

Für die partikuläre Lösung machen wir wiederum den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2\,, \quad y_p'(x) = 2Ax\,, \quad y_p''(x) = 2A$$

und erhalten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$A\,x^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad y_p(x) = -\frac{1}{2}\,x^2$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x - \frac{1}{2}\,x^2$$

Zur Bestimmung der Lösung könnte man hier auch einfach y'' zweimal integrieren.

d) Diese Differenzialgleichung ist inhomogen. Auf der rechten Seite steht x, das zugeordnete λ ist demnach $\lambda_R = 0$. Es liegt doppelte Resonanz vor:

$$\lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_h(x) = c_1 + c_2 x$$

Für die partikuläre Lösung machen wir nun den Ansatz

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 x)x^2\,, \quad y_p'(x) = (2A_0 + 3A_1 x)x\,, \quad y_p''(x) = 2A_0 + 6A_1 x$$

und erhalten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$2A_0 + 6A_1 x = x \quad \Longrightarrow \quad A_0 = 0\,,\ A_1 = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad y_p(x) = -\frac{1}{2}\,x^3$$

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}\,x^3$$

Zur Bestimmung der Lösung könnte man hier auch einfach y'' zweimal integrieren.

e) Die Differenzialgleichung ist homogen:

$$\lambda^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{\,x} + c_2\,\mathrm{e}^{\,-x}$$

f) Die Differenzialgleichung ist homogen:

$$\lambda^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c_1\,\sin x + c_2\,\cos x$$

Lösung 14.5

Aus den Fundamentallösungen lassen sich die EWs und aus den EWs die charakteristische Gleichung bestimmen. Aus der charakteristischen Gleichung kann man a_0 und a_1 direkt ablesen.

a)

$$\mathrm{e}^{2\,x}, \mathrm{e}^{-4x} \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4 \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 2)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \Longrightarrow a_1 = 2, a_0 = -8.$$

b)

$$\cos 4x, \sin 4x \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4j \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 4j)(\lambda + 4j) = \lambda^2 + 16 \Longrightarrow a_1 = 0, a_0 = 16.$$

c)

$$\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Longrightarrow a_1 = -4, a_0 = 4.$$

d)

$$\mathrm{e}^{-x}\cos 3x, \mathrm{e}^{-x}\sin 3x, \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3j \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda + 1 - 3j)(\lambda + 1 + 3j)$$

Diesen Ausdruck vereinfacht man durch

$$((\lambda + 1) - 3j)((\lambda + 1) + 3j) = (\lambda + 1)^2 - (3j)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 9 \Longrightarrow a_1 = 2, a_0 = 10.$$

e)

$$1, \mathrm{e}^{-3x} \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 0)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 3\lambda \Longrightarrow a_1 = 3, a_0 = 0.$$

f)

$$1, x \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - 0)(\lambda - 0) = \lambda^2 \Longrightarrow a_1 = 0, a_0 = 0.$$

Lösung 14.6

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 4\mathrm{i}\,.$$

a) Der zugeordnete Eigenwert der rechten Seite lautet $\lambda_R = \pm 4\mathrm{i}$. Somit liegt Resonanz vor. Der normale Störansatz wird mit x multipliziert:

$$y_p(x) = x\big(A_1\cos(4x) + A_2\sin(4x)\big)$$

b) Der zugeordnete Eigenwert der rechten Seite lautet $\lambda_R = \pm 4\mathrm{i}$. Somit liegt Resonanz vor. Der normale Störansatz wird mit x multipliziert:

$$y_p(x) = x\big(A_1\cos(4x) + A_2\sin(4x)\big)$$

c) Der zugeordnete Eigenwert der rechten Seite lautet $\lambda_R = 4 \pm 4\mathrm{i}$. Somit liegt keine Resonanz vor. Es genügt der normale Störansatz:

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{4x}\left(A_1\cos(4x) + A_2\sin(4x)\right)$$

Lösung 14.7

a) Die Differenzialgleichung ist nicht linear.

b) Nein. Die Ordnung der Differenzialgleichung ist nicht eins.

Lösung 14.8

Man verwendet die Zustandsvariablen $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, $x_3(t) = y''(t)$ und transformiert das System in Normalform

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung erhält man aus der Bedingung, dass die Determinante von $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ null ist

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda(2-\lambda)+3)+1 = -\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda+1.$$

Man erkennt, dass die charakteristische Gleichung der Normalform mit der charakteristischen Gleichung der DGL

$$\begin{array}{llllll} y'''(x) & -2y''(x) & +3y'(x) & -y(x) & = & 0 \\ \lambda^3 & -2\lambda^2 & +3\lambda & -1 & = & 0 \end{array}$$

übereinstimmt.

Lösung 14.9

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2a & -a & -b & 0 \\ -a & -2a & 0 & -b \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{r}(t)}.$$

Lösung 14.10

a) Man bestimmt zunächst die EWs der Systemmatrix

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \alpha & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 + \alpha = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12-4\alpha}}{2} = -1 \pm \sqrt{4-\alpha}.$$

Für $\alpha \leq 4$ sind alle EWs reell, für $\alpha > 4$ komplex.

b) Alle Lösungen sind genau dann asymptotisch stabil, falls die Realteile aller EWs negativ sind. Für $\alpha > 4$ sind die Realteile beider EWs -1, also die Lösungen asymptotisch stabil. Für $\alpha \leq 4$ muss der Wert unter der Wurzel kleiner als 1 sein, sonst ist ein EW nicht negativ, also $3 < \alpha \leq 4$. Insgesamt sind also für $\alpha > 3$ alle Lösungen asymptotisch stabil.

Lösung 14.11

a) Der übliche Ansatz zur Bestimmung der Eigenwerte lautet

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -c \\ 0 & c & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Berechnet man diese Determinante mit der Regel von Sarrus oder durch Entwicklung etwa nach der ersten Spalte, so erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -2\,, \quad \lambda_{2,3} = \begin{cases} -2 \pm ci & \text{falls } c > 0 \\ -2 & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

b) Das Differenzialgleichungssystem ist asymptotisch stabil, da alle Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen.

Lösung 14.12

a) Wir bestimmen die Wronski-Determinante der Matrix, gebildet aus den beiden Funktionen und deren Ableitungen:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

Die Determinante ist also von null verschieden. Daher sind die beiden Funktionen y_1 und y_2 linear unabhängig.

b) Wir bestimmen die Wronski-Determinante der Matrix, gebildet aus den beiden Funktionen und deren Ableitungen:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \sin(x+\pi) \\ \cos x & \cos(x+\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & -\sin x \\ \cos x & -\cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cos x + \sin x \cos x = 0$$

Die Determinante ist also überall null. Daher sind die beiden Funktionen y_1 und y_2 linear abhängig. Wegen $\sin(x+\pi) = -\sin x$ ist $y_2 = -y_1$ und man hätte das Ergebnis auch gleich ohne größere Rechnung sehen können.

Lösung 14.13

a) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ergibt sich aus den beiden Differenzialgleichungen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnet man die Determinante von $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$, so erhält man die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a^2}\,.$$

c) Für $|a| > 1$ ist bei $\lambda_{1,2}$ die Diskriminante der Wurzel negativ und es gibt Lösungen in Form von Schwingungen.

d) Für $a = 0$ folgt $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_1 = 0$. Damit ist das System für $a = 0$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Für $0 < |a| < 1$ sind beide Eigenwerte negativ. Für $|a| = 1$ ist $\lambda_1 = -1$ doppelter Eigenwert. Für $|a| > 1$ haben beide Eigenwerte einen negativen Realteil. Damit ist das System für $a \neq 0$ sowohl stabil als auch asymptotisch stabil.

e) Das charakteristische Polynom wird durch die Eigenwerte erzeugt:

$$p(\lambda) = \left(\lambda + 1 - \sqrt{1-a^2}\right) \cdot \left(\lambda + 1 + \sqrt{1-a^2}\right) = (\lambda+1)^2 - \left(\sqrt{1-a^2}\right)^2$$

Die zweite Gleichung entsteht durch geschicktes Anwenden der dritten binomischen Formel. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1 + a^2 = \lambda^2 + 2\lambda + a^2 \,.$$

Die zugehörige Differenzialgleichung lautet demnach

$$y'' + 2\,y' + a^2 = 0 \,.$$

Lösung 14.14

a) Zunächst bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'(x) - \frac{1}{x} \cdot y(x) = 0$$

durch Separation

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x} \cdot y \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}\,y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \Longrightarrow \ln|y| = \ln|x| + C \Longrightarrow y(x) = C \cdot x.$$

b) Dann bestimmt man eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x) \cdot x \Longrightarrow y_p'(x) = C'(x) \cdot x + C(x)$$

und Einsetzen in die DGL

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x} \cdot C(x) \cdot x = x \Longrightarrow C'(x) = 1 \Longrightarrow C(x) = x \Longrightarrow y_p(x) = x \cdot x = x^2.$$

Die allgemeine Lösung erhält man aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer partikulären Lösung

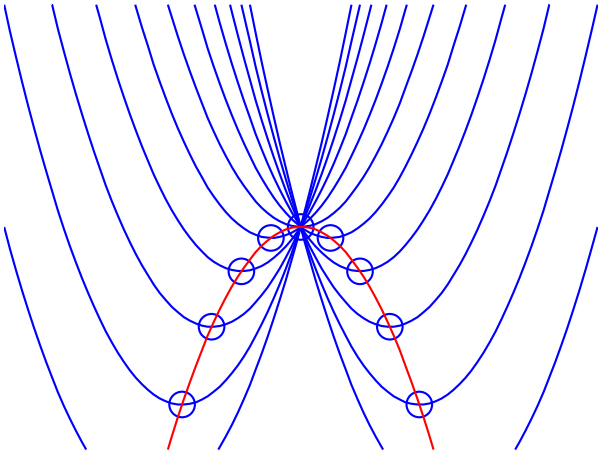
$$y(x) = C \cdot x + x^2 = x(C + x).$$

Die Lösungskurven sind also Parabeln, die alle nach oben geöffnet sind und durch den Ursprung gehen.

c) Die Extrempunkte sind durch die Bedingung $y'(x) = 0$ gekennzeichnet. Aus der DGL ergibt sich

$$-\frac{y(x)}{x} = x \Longrightarrow y(x) = -x^2.$$

Also liegen alle Extremwerte auf der nach unten geöffneten Normalparabel durch den Ursprung. (Wenn man die Lösungskurven aus **a)** $y(x) = x(C+x)$ schon kennt, dann sind die Extremwerte natürlich die Scheitelpunkte $(-\frac{C}{2} \mid -\frac{C^2}{4}$ dieser Parabeln.)



Lösung 14.15

a) Durch Separation ergibt sich

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x} \Longrightarrow \int y\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C \Longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+C}.$$

b) Diese Differenzialgleichung lässt sich durch Separation lösen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\frac{\sin(x)}{\cos x} = 2\sqrt{y} \Longrightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ ist vom Typ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, deshalb ergibt sich

$$\sqrt{y(x)} = \ln|\sin(x)| + C \Longrightarrow y(x) = \left(\ln|\sin(x)| + C\right)^2.$$

c) Auch bei dieser Differenzialgleichung führt Separation zum Erfolg

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = -\int (y+1)^2\,\mathrm{d}y \Longrightarrow \frac{1}{4}x^4 + C = -\frac{1}{3}(y+1)^3 \Longrightarrow y(x) = -1 + \sqrt[3]{-\frac{3}{4}x^4 + C}.$$

Dabei ist es geschickt, den Klammerausdruck $(y+1)^2$ bei der Integration nicht aufzulösen, damit man nach $y(x)$ auflösen kann.

d) Separation liefert

$$y\,y' = \ln x \Longrightarrow \int y\,\mathrm{d}y = \int \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Die Stammfunktion von $\ln x$ kann man entweder trickreich durch partielle Integration bestimmen

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - x + C$$

oder in einer Formelsammlung nachschlagen. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = x\ln x - x + C \Longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{2\,x\ln x - 2\,x + C}.$$

Lösung 14.16

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten bestimmt man mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 6\lambda + c = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4c}}{2} = -3 \pm \sqrt{9 - c}.$$

a)

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4} = -1, -5 \Longrightarrow y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x}$$

b)

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{0} = -3 \text{ doppelter EW} \Longrightarrow y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 x \mathrm{e}^{-3x}$$

c)

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2\mathrm{i} \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-3x}\,(C_1 \cos 2\,x + C_2 \sin 2\,x)$$

Lösung 14.17

Diese Aufgabe kann durch ganz unterschiedliche Methoden gelöst werden.

Methode 1 Man berechnet die Ableitungen

$$\begin{array}{rclcrcl} y(x) & = & e^{-x}\cos(2\,x), & & y'(x) & = & -e^{-x}\cos(2\,x) - 2\,e^{-x}\sin(2\,x), \\ y''(x) & = & -3\,e^{-x}\cos(2\,x) + 4\,e^{-x}\sin(2\,x), & & y'''(x) & = & 11\,e^{-x}\cos(2\,x) + 2\,e^{-x}\sin(2\,x) \end{array}$$

und setzt in die DGL ein

$$11\,e^{-x}\cos(2\,x) + 2\,e^{-x}\sin(2\,x) - e^{-x}\cos(2\,x) - 2\,e^{-x}\sin(2\,x) - 10e^{-x}\cos(2\,x) = 0.$$

Methode 2 Die Lösung $\mathrm{e}^{-x}\cos 2\,x$ wird durch die EWs $\lambda = -1 \pm 2j$ erzeugt. Man zeigt also, dass $\lambda = -1 \pm 2j$ Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + \lambda - 10 = \lambda[\lambda^2 + 1] - 10 = 0$$

sind. Da die beiden Werte konjugiert komplex sind, reicht es, einen der beiden Werte zu testen

$$(-1 + 2j)[(-1 + 2j)^2 + 1] - 10 = (-1 + 2j)[-2 - 4j] - 10 = 2 + 4j - 4j + 8 - 10 = 0.$$

Methode 3 Man berechnet die allgemeine Lösung mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + \lambda - 10 = 0.$$

Die Lösung $\lambda_1 = 2$ kann man erraten (ganzzahlige Lösungen sind Teiler von 10) und dann durch Polynomdivision abspalten

$$(\lambda^3 + \lambda - 10) : (\lambda - 2) = \lambda^2 + 2\lambda + 5.$$

Die restlichen EWs sind

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2j.$$

Dadurch erhält man die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

Lösung 14.18

Methode 1 Bei allen Teilaufgaben handelt es sich um homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten, die man durch Berechnung der Eigenwerte mithilfe der charakteristischen Gleichung lösen kann.

a)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm j \Longrightarrow s(t) = \mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man mithilfe von

$$s'(t) = -\mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \mathrm{e}^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

aus den Anfangswerten

$$1 = s(0) = C_1, \Longrightarrow C_1 = 1, \quad 1 = s'(0) = -C_1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 2.$$

Die Lösung des AWP lautet also

$$s(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + 2 \sin t).$$

b)

$$\lambda^2 + 4\lambda + (4 + \omega^2) = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \omega \mathrm{i} \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man mithilfe von

$$y'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) + \mathrm{e}^{-2x}(-C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x)$$

aus den Anfangswerten

$$1 = y(0) = C_1, \Longrightarrow C_1 = 1, \quad \omega - 2 = y'(0) = -2C_1 + \omega C_2 \Longrightarrow C_2 = 1.$$

Die Lösung des AWP lautet also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(\cos \omega x + \sin \omega x).$$

c)

$$\lambda^2 - 2k\lambda + k^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4k^2}}{2} = k \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man mithilfe von

$$y'(x) = k\mathrm{e}^{kx}(C_1 + C_2 x) + \mathrm{e}^{kx} C_2$$

aus den Anfangswerten

$$\sqrt{2} = y(0) = C_1 \Longrightarrow C_1 = \sqrt{2}, \quad k\sqrt{2} = y'(0) = kC_1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Die Lösung des AWP lautet also

$$y(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{kx}.$$

Methode 2 Bei allen Teilaufgaben handelt es sich um homogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten der Ordnung 2, also um Spezialfälle der homogenen Schwingungsdifferenzialgleichung

$$y''(x) + 2\delta y'(x) + w_0^2 y(x) = 0.$$

a)

$$\delta = 1, w_0^2 = 2 \Longrightarrow \omega_\delta = \sqrt{w_0^2 - \delta^2} = 1 \Longrightarrow s(t) = \mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man wie bei der Methode 1.

b)

$$\delta = 2, w_0^2 = 4+\omega^2 \Longrightarrow \omega_\delta = \sqrt{w_0^2 - \delta^2} = \sqrt{4 + \omega^2 - 4} = \omega \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man wie bei der Methode 1.

c)

$$\delta = -k, w_0^2 = k^2 \Longrightarrow \omega_\delta = \sqrt{w_0^2 - \delta^2} = \sqrt{k^2 - k^2} = 0 \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Die Konstanten C_1 und C_2 berechnet man wie bei der Methode 1.

Lösung 14.19

a) Durch Separation der Variablen erhält man

$$t \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (1-t)x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Integriert man beide Seiten, so folgt

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int 1\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln|x| + C = \ln|t| - t\,.$$

Durch Einsetzen des Anfangswerts ergibt sich $C = -1$ und damit

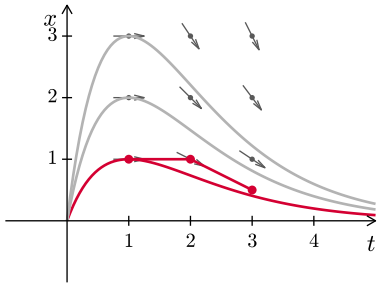
$$\ln|x| = \ln|t| - t + 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| = |t|\,\mathrm{e}^{1-t} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = t\,\mathrm{e}^{1-t}\,.$$

b) Durch Umformen erhält man die Differenzialgleichung in expliziter Form

$$\dot{x} = \frac{1-t}{t}\,x\,.$$

und damit die Steigungen

$$m(1,1) = 0, \quad m(1,2) = 0, \quad m(1,3) = 0$$
$$m(2,1) = -\tfrac{1}{2}, \; m(2,2) = -1, \; m(2,3) = -\tfrac{3}{2}$$
$$m(3,1) = -\tfrac{2}{3}, \; m(3,2) = -\tfrac{4}{3}, \; m(3,3) = -2$$



c) Das Euler-Verfahren liefert im ersten Schritt

$$x_1 = x_0 + h\,\frac{1-t_0}{t_0}\,x_0 = 1\,, \quad t_1 = 2$$

und im zweiten Schritt

$$x_2 = x_1 + h\,\frac{1-t_1}{t_1}\,x_1 = \frac{1}{2}\,, \quad t_2 = 3\,.$$

Lösung 14.20

a) Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' = y$ ist einfach:

$$y_h(x) = c\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y' = y - x^2 + 1$ erhält man durch Variation der Konstanten c:

$$y_p(x) = c(x)\,\mathrm{e}^{x} \quad \Longrightarrow \quad y_p'(x) = c'(x)\,\mathrm{e}^{x} + c(x)\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Durch Einsetzen in die Differenzialgleichung erhält man

$$c'(x)\,\mathrm{e}^{x} = -x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Integriert man nun zweimal partiell, so gelangt man zur Lösung

$$c(x) = (1 + 2x + x^2)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y_p(x) = c(x)\,\mathrm{e}^{x} = 1 + 2x + x^2$$

Die allgemeine Lösung lautet

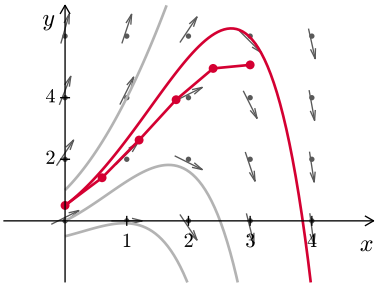
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = 1 + 2x + x^2 + c\,\mathrm{e}^{x}$$

b) Durch Einsetzen des Anfangswerts erhält man die Lösung

$$y(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$$

c)

Abbildung



d) Das Euler-Verfahren liefert im ersten Schritt

$$y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0^2 + 1) = 1.4\,, \quad x_1 = 0.6$$

und im zweiten Schritt

$$y_2 = y_1 + h(y_1 - x_1^2 + 1) = 2.624\,, \quad x_2 = 1.2$$

und im dritten Schritt

$$y_3 = y_2 + h(y_2 - x_2^2 + 1) = 3.9344\,, \quad x_3 = 1.8$$

und im vierten Schritt

$$y_4 = y_3 + h(y_3 - x_3^2 + 1) = 4.9510,\,, \quad x_4 = 1.2$$

und im fünften Schritt

$$y_5 = y_4 + h(y_4 - x_4^2 + 1) = 5.0657\,, \quad x_5 = 1.8$$

Lösung 14.21

a) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2j \Longrightarrow y_h(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Auf die beiden Teile $50x$ und $8\mathrm{e}^{-x}$ der Störfunktion kann man das Superpositionsprinzip anwenden. Für $50x$ („Polynom vom Grad 1 rein $\Longrightarrow$ Polynom vom Grad 1 raus“) macht man den Ansatz

$$y_{p_1}(x) = A + Bx \Longrightarrow y'_{p_1}(x) = B \Longrightarrow y''_{p_1}(x) = 0.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$0 + 2B + 5(A + Bx) = 50x \Longrightarrow B = 10,\ A = -4.$$

Die erste partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p_1}(x) = -4 + 10x.$$

Für $8\mathrm{e}^{-x}$ liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ e^{kx} rein $\Longrightarrow$ e^{kx} raus“)

$$y_{p_2}(x) = D\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow y'_{p_2}(x) = -D\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow y''_{p_2}(x) = D\mathrm{e}^{-x}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{e}^{-x}(D - 2D + 5D) = 8\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow D = 2.$$

Die zweite partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p_2}(x) = 2\mathrm{e}^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - 4 + 10x + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

b) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung wie bei **a)**.

$$y_h(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Für $\cos 2x$ liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ $\cos kx$ rein $\Longrightarrow$ Kombination aus $\cos kx$ und $\sin kx$ raus“)

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \Longrightarrow y_p'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \Longrightarrow y_p''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 5(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x$$

bzw. durch Zusammenfassen von $\sin 2x$ und $\cos 2x$

$$(-4B - 4A + 5B)\sin 2x + (-4A + 4B + 5A)\cos 2x = \cos 2x$$

was einem LGS für A und B entspricht

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow A = \frac{1}{17},\ B = \frac{4}{17}.$$

Eine partikuläre Lösung ist somit

$$y_p(x) = \frac{1}{17}\cos 2x + \frac{4}{17}\sin 2x.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{17}\cos 2x + \frac{4}{17}\sin 2x.$$

c) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = \mathrm{e}^{\pm j\frac{\pi}{3}}.$$

Die drei EW sind die dritten komplexen Wurzeln aus -1

$$\lambda_{2,3} = \mathrm{e}^{\pm j\frac{\pi}{3}} = \cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL erhält man

$$y_h(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Die Störfunktion kann man zerlegen in

$$12\cosh x = 12\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2} = 6\mathrm{e}^{x}+6\mathrm{e}^{-x}$$

und das Superpositionsprinzip anwenden.
Für $6\mathrm{e}^{x}$ liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ e^{kx} rein $\Longrightarrow$ e^{kx} raus“)

$$y_{p1}(x) = A\mathrm{e}^{x} \Longrightarrow y'_{p1}(x) = A\mathrm{e}^{x} \Longrightarrow y''_{p1}(x) = A\mathrm{e}^{x}. \Longrightarrow y'''_{p1}(x) = A\mathrm{e}^{x}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{e}^{x}(A+A) = 6\mathrm{e}^{x} \Longrightarrow A = 3.$$

Die erste partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p1}(x) = 3\mathrm{e}^{x}.$$

Für $6\mathrm{e}^{-x}$ liegt **einfache** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ e^{kx} rein $\Longrightarrow$ e^{kx} raus“)

$$\begin{array}{rclrcl} y_{p2}(x) & = & Bx\mathrm{e}^{-x} & y'_{p2}(x) & = & B\mathrm{e}^{-x} - Bx\mathrm{e}^{-x} \\ y''_{p2}(x) & = & -2B\mathrm{e}^{-x} + Bx\mathrm{e}^{-x} & y'''_{p2}(x) & = & 3B\mathrm{e}^{-x} - Bx\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{e}^{-x}(3B - Bx + Bx) = 6\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow B = 2.$$

Die zweite partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p2}(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}(C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + 3\mathrm{e}^{x} + 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

d) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = 0.$$

Die Lösungen dieser biquadratischen Gleichung findet man durch die Substitution $u = \lambda^2$

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \Longrightarrow u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = 4, -1. \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2,\ \lambda_{3,4} = \pm j.$$

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL erhält man

$$y_h(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + +C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Für die Störfunktion kann man das Superpositionsprinzip anwenden.
Für x^2 liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ Polynom vom Grad 2 rein $\Longrightarrow$ Polynom vom Grad 2 raus“)

$$y_{p1}(x) = A+Bx+Cx^2 \Longrightarrow y'_{p1}(x) = B+2Cx \Longrightarrow y''_{p1}(x) = 2C \Longrightarrow y'''_{p1}(x) = y^{(4)}_{p1}(x) = 0.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$-6C - 4A - 4Bx - 4Cx^2 = x^2 \Longrightarrow C = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ A = \frac{3}{8}.$$

Die erste partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p1}(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x^2.$$

Für e^{-x} liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („ e^{kx} rein $\Longrightarrow$ e^{kx} raus“)

$$y_{p2}(x) = y''_{p2}(x) = y^{(4)}_{p2}(x) = D\mathrm{e}^{-x},\ y'_{p2}(x) = y'''_{p2}(x) = -D\mathrm{e}^{-x}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathrm{e}^{-x}(D - 3D - 4D) = \mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow D = -\frac{1}{6}.$$

Die zweite partikuläre Lösung ist somit

$$y_{p2}(x) = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}.$$

Lösung 14.22

a) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1, -3 \Longrightarrow y_h(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}.$$

Bei der Störfunktion $2\sin x$ liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („$\sin\omega x$ rein $\Longrightarrow$ Kombination aus $\sin\omega x$ und $\cos\omega x$ raus“)

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x \Longrightarrow y'_p(x) = -A\sin x + B\cos x \Longrightarrow y''_p(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Durch Einsetzen in die DGL ergibt sich

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) - 3(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x$$

und nach Zusammenfassen von $\sin x$ und $\cos x$

$$(-B - 2A - 3B)\sin x + (-A + 2B - 3A)\cos x = 2\sin x$$

das LGS für A und B

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow A = -\frac{1}{5},\ B = -\frac{2}{5}.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x.$$

Hinter der Forderung „mit Steigung 1 durch den Nullpunkt“ verbergen sich die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{5}, \quad 1 = y'(0) = C_1 - 3C_2 - \frac{2}{5} \Longrightarrow C_2 = -\frac{3}{10},\ C_1 = \frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Lösungskurve ist also

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{3}{10}e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x.$$

b) Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2+6\lambda+25 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = -3 \pm 4j \Longrightarrow y_h(x) = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Bei der Störfunktion $50x-13$ liegt **keine** Resonanz vor und man macht den Ansatz („Polynom vom Grad 1 rein $\Longrightarrow$ Polynom vom Grad 1 raus“)

$$y_p(x) = A + Bx \Longrightarrow y_p'(x) = B \Longrightarrow y_p''(x) = 0.$$

Durch Einsetzen in die DGL ergibt sich

$$6B + 25A + 25Bx = 50x - 13 \Longrightarrow B = 2,\ A = -1.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x) - 1 + 2x.$$

Hinter der Forderung „hat in $P(0\,|\,1)$ eine waagrechte Tangente“ verbergen sich die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

$$1 = y(0) = C_1 - 1, \quad 0 = y'(0) = -3C_1 + 4C_2 + 2 \Longrightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 1.$$

Die gesuchte Lösungskurve ist also

$$y(x) = e^{-3x}(2\cos 4x + \sin 4x) - 1 + 2x.$$

Lösung 14.23

Alle Teilaufgaben sind vom Typ

$$y'(x) + g(x)\cdot y(x) = r(x).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL erhält man dabei durch

$$y_h(x) = C \cdot e^{-G(x)},$$

wobei $G(x)$ irgendeine Stammfunktion von $g(x)$ ist. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung berechnet man dann durch Variation der Konstanten.

a) Aus $g(x) = \frac{1}{1+x}$ ergibt sich

$$-G(x) = -\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = -\ln|1+x| = \ln\frac{1}{|1+x|}$$

und somit

$$y_h(x) = C\cdot \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{|1+x|}} = \frac{C}{1+x}.$$

Bei der Variation der Konstanten setzt man

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{1+x} \quad \text{und} \quad y_p'(x) = \frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2}$$

in die DGL ein

$$\frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\cdot\frac{C(x)}{1+x} = -6x$$

und erhält

$$\frac{C'(x)}{1+x} = -6x \Longrightarrow C'(x) = -6x-6x^2 \Longrightarrow C(x) = -3x^2-2\,x^3+\tilde{C} \Longrightarrow y_p(x) = \frac{-3x^2-2\,x^3+\tilde{C}}{1+x}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = \frac{C}{1+x} + \frac{-3x^2-2\,x^3}{1+x}.$$

Die Konstante C bestimmt man aus dem Anfangswert

$$3 = y(0) = \frac{C}{1+0} \Longrightarrow C = 3 \Longrightarrow y(x) = \frac{3-3x^2-2\,x^3}{1+x}.$$

b) Aus $g(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ ergibt sich

$$-G(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|\sin x|$$

und somit

$$y_h(x) = C\cdot \mathrm{e}^{\ln|\sin x|} = C\cdot\sin x.$$

Da die DGL homogen ist, ist die homogene Lösung zugleich die allgemeine Lösung, also $y(x) = y_h(x)$. Die Konstante C bestimmt man aus dem Anfangswert

$$1 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = C\cdot\sin(\pi/6) = C\cdot\frac{1}{2} \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow y(x) = 2\sin x.$$

Einen Näherungswert $\tilde{y}_1$ für die Lösung zum Wert $x = \frac{\pi}{6}+0.1$ ergibt sich mit dem Euler-Verfahren:

$$\tilde{y}_1 = 1+0.1\frac{1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 1+\frac{\sqrt{3}}{10} \approx 1.1732\,.$$

Die Abweichung des Näherungswertes von der exakten Lösung beträgt

$$\left|\tilde{y}_1 - y\left(\frac{\pi}{6}+0.1\right)\right| = \left|1+\frac{\sqrt{3}}{10}-2\,\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.1\right)\right| \approx 1.1732-1.1679 = 0.0053\,.$$

c) Aus $g(x) = 2x$ ergibt sich

$$-G(x) = -\int 2x\,\mathrm{d}x = -x^2$$

und somit

$$y_h(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Bei der Variation der Konstanten setzt man

$$y_p(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}. \text{ und } y_p'(x) = C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + C(x) \cdot (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

in die DGL ein

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + C(x) \cdot (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 2x \cdot C(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 2x$$

und erhält

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 2x \Longrightarrow C'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \Longrightarrow C(x) = \int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + \tilde{C}.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 1.$$

Die Konstante C bestimmt man aus dem Anfangswert

$$2 = y(0) = C \cdot 1 + 1 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + 1.$$

d) Aus $g(x) = -\frac{1}{x \ln x}$ ergibt sich

$$-G(x) = \int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln|x||$$

und somit

$$y_h(x) = C \cdot \mathrm{e}^{\ln|\ln|x||} = C \cdot \ln|x|.$$

Da die DGL homogen ist, ist die homogene Lösung zugleich die allgemeine Lösung, also $y(x) = y_h(x)$. Die Konstante C bestimmt man aus dem Anfangswert

$$2 = y(\mathrm{e}^2) = C \cdot \ln \mathrm{e}^2 = C \cdot 2 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow y(x) = \ln|x|.$$

Lösung 14.24

Bei den folgenden Umformungen ist C immer eine beliebige reelle Konstante.

a) Lineare Substitution $u(x) = x + y(x)$, also $u'(x) = 1 + y'(x)$ eingesetzt in die DGL ergibt:

$$u'(x) - 1 = u(x)^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u(x)^2 + 1 \Longrightarrow \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x \Longrightarrow \arctan(u(x)) = x + C$$

Rücksubstitution

$$\arctan(x + y(x)) = x + C \Longrightarrow x + y(x) = \tan(x + C) \Longrightarrow y(x) = \tan(x + C) - x.$$

b) Lineare Substitution $u(x) = 2x - y(x) + 3$, also $u'(x) = 2 - y'(x)$ eingesetzt in die DGL ergibt:

$$u(x)(2 - u'(x)) = 1 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{1}{u(x)} \Longrightarrow \int \frac{u}{2u-1}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$

Das Integral $\int \frac{u}{2u-1}\,\mathrm{d}u$ löst man durch Polynomdivision:

$$u : (2u - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4u - 2}$$

Dadurch ergibt sich:

$$\frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{4}\ln|u(x) - \frac{1}{2}| = x + C$$

Rücksubstitution

$$x - \frac{1}{2}y(x) + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x - y(x) + \frac{5}{2}| = x + C \Longrightarrow \ln|2x - y(x) + \frac{5}{2}| = 2y(x) + C$$

Die Gleichung lässt sich zwar nicht nach $y(x)$ auflösen, wir können sie aber nach x auflösen.

$$2x - y(x) + \frac{5}{2} = C \cdot \mathrm{e}^{2y(x)} \Longrightarrow x(y) = \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} + C \cdot \mathrm{e}^{2y}$$

c) Man versucht, die Gleichung auf eine Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung zurückzuführen:

$$y'(x) = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$

Die Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, also $u(x)x = y(x)$ und $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ setzt man in die DGL ein:

$$u + xu'(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) - \frac{1}{u(x)}\right) \Longrightarrow xu'(x) = -\frac{u(x)}{2} - \frac{1}{2u(x)} = -\frac{u(x)^2 + 1}{2u(x)}$$

Durch Trennung kann man die DGL dann lösen:

$$-\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow -\ln(u^2+1) = \ln|x| + C \Longrightarrow \frac{1}{u^2+1} = Cx \Longrightarrow u^2 + 1 = \frac{1}{Cx}$$

Rücksubstitution

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{Cx} - 1 \Longrightarrow y^2 = Cx - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{Cx - x^2}.$$

d) Auch hier ist das Ziel eine Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung. Dazu teilt man die Gleichung durch x:

$$y'(x) + \sqrt{\frac{x^2 + y(x)^2}{x^2}} = \frac{y(x)}{x} \Longrightarrow y'(x) + \sqrt{1 + \frac{y(x)^2}{x^2}} = \frac{y(x)}{x}$$

Die Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, also $u(x)x = y(x)$ und $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ setzt man in die DGL ein:

$$u'(x)x + u(x) + \sqrt{1 + u(x)^2} = u(x) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -\sqrt{1+u^2} \Longrightarrow -\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ ist $\operatorname{arsinh}(u)$:

$$-\operatorname{arsinh}(u(x)) = \ln|x| + C \Longrightarrow u(x) = \sinh(-\ln|x| + C)$$

Die Rücksubstitution ergibt schließlich

$$y(x) = x \cdot \sinh(-\ln|x| + C)$$

Lösung 14.25

Es handelt sich um eine lineare DGL zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten, die durch die Substitution $u(x) = y'(x)$ auf eine DGL erster Ordnung zurückgeführt werden kann.

$$2x \cdot u'(x) - u(x) = 9x^2.$$

Nach Division durch $2x$ ergibt sich die Normalform

$$u'(x) \underbrace{-\frac{1}{2x}}_{g(x)} u(x) = \underbrace{\frac{9}{2}x}_{r(x)}.$$

Zunächst löst man die homogene DGL durch Separation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{2x} \Longrightarrow \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \Longrightarrow u = C\sqrt{x}.$$

Die inhomogene DGL löst man durch Variation der Konstanten

$$u(x) = C(x) \cdot \sqrt{x} \Longrightarrow u'(x) = C'(x) \cdot \sqrt{x} + C(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$C(x)$ bestimmt man durch Einsetzen in die DGL

$$C'(x) \cdot \sqrt{x} + C(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}C(x) \cdot \sqrt{x} = \frac{9}{2}x \Longrightarrow C'(x) = \frac{9}{2}\sqrt{x} \Longrightarrow C(x) = 3\sqrt{x^3}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL in $u(x)$ lautet somit

$$u(x) = \underbrace{C \cdot \sqrt{x}}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen DGL}} + \underbrace{3\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}}_{\text{spezielle Lösung der inhomogenen DGL}}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL in $y(x)$ ergibt sich durch Integration

$$y(x) = \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(C \cdot \sqrt{x} + 3x^2\right)\mathrm{d}x = C\sqrt{x^3} + x^3 + \tilde{C}.$$

Lösung 14.26

Es handelt sich um eine lineare DGL zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten, die durch die Substitution $u(x) = y'(x)$ auf eine DGL erster Ordnung zurückgeführt werden kann.

$$u'(x) \cdot \cos x + u(x) \cdot \sin x = 0, \quad u(0) = 2.$$

Nach Division durch $\cos x$ ergibt sich die Normalform der homogenen DGL

$$u'(x) + \tan x \cdot u(x) = 0,$$

die man durch Separation löst

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\tan x \cdot u \Longrightarrow \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\int \tan x \,\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|u| = \ln|\cos x| + C \Longrightarrow u(x) = C\cos x.$$

C bestimmt man aus dem Anfangswert

$$2 = u(0) = C \cdot \cos 0 \Longrightarrow C = 2.$$

Die allgemeine Lösung der DGL in $y(x)$ ergibt sich durch Integration

$$y(x) = \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x\,\mathrm{d}x = 2\sin x + \tilde{C}.$$

Die Konstante $\tilde{C}$ bestimmt man aus dem Anfangswert

$$1 = y(0) = 2\sin 0 + \tilde{C} \Longrightarrow \tilde{C} = 1.$$

Die Lösung des AWP lautet also

$$y(x) = 2\sin x + 1.$$

Lösung 14.27

a) Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix lauten

$$\lambda_{1,2} = 1, 2 \quad , \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus wird die reelle Lösung gebildet:

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix lauten

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\mathrm{i} \quad , \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Den Vektor $\boldsymbol{v}_1$ kann man in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{i}$$

Daraus wird die reelle Lösung gebildet:

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\sin(2t)\right) + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cos(2t)\right)$$

Diese kann man noch vereinfachen:

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Lösung 14.28

In Matrixform lautet das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Man bestimmt zunächst die EWs der Matrix $\boldsymbol{A}$. Dazu muss die Determinante von $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ null sein.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm j.$$

Bei einem Paar konjugiert komplexer EWs genügt es, einen komplexen EV zu bestimmen. Dazu löst man das homogene LGS $(\boldsymbol{A} - j\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1-j & 1 & 0 \\ -2 & 1-j & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \end{bmatrix}.$$

Die reellen Fundamentallösungen ergeben sich aus dem Realteil und dem Imaginärteil der komplexen Basislösung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(t) &= \mathrm{e}^{jt} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \end{bmatrix} = (\cos t + j \sin t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + j \sin t \\ \cos t + j \sin t + j \cos t - \sin t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Anfangswerten

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2 \sin t \end{bmatrix}.$$

Lösung 14.29

a) Zunächst bestimmt man die Eigenwerte aus der Bedingung, dass die Determinante von $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ null ist

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 1) - (1 - \lambda - 1) + 1 + 1 + \lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Die Lösungen kann man alle erraten

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2,$$

oder nur eine erraten und den quadratischen Rest durch Polynomdivision abspalten. Nun bestimmt man zu jedem EW einen EV.
EV $\boldsymbol{v}_1$ für EW $\lambda_1 = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right].$$

EV $\boldsymbol{v}_2$ für EW $\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right].$$

EV $\boldsymbol{v}_3$ für EW $\lambda_3 = -2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v}_3 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right].$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right] + C_2 \mathrm{e}^{-t} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right] + C_3 \mathrm{e}^{-2t} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right].$$

b) Zunächst bestimmt man die Eigenwerte aus der Bedingung, dass die Determinante von $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ null ist

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{ccc} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{array}\right| &= -\lambda \left|\begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{array}\right| \\ &= -\lambda(\lambda + \lambda^2 + 1) - 1 = -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung $\lambda_1 = -1$ kann man erraten und den quadratischen Rest durch Polynomdivision abspalten

$$(-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1) : (\lambda + 1) = -\lambda^2 - 1.$$

Die restlichen Eigenwerte sind also $\lambda_{2,3} = \pm j$.
EV $\boldsymbol{v}_1$ für EW $\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right].$$

EV $\boldsymbol{v}_2$ für EW $\lambda_2 = j$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1-j & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1-j & 0 \\ 0 & -j & 1 & 0 \\ 0 & -1+j & -1-j & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ j \\ -1 \end{array}\right].$$

Den dritten EV braucht man nicht zu berechnen, denn der komplexe EW und EV erzeugt durch Realteil und Imaginärteil zwei reelle Fundamentallösungen.

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{jt}\begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix} = (\cos t + j\sin t)\begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Lösung 14.30

In Matrixform lautet das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Man bestimmt zunächst die EWs der Matrix $\boldsymbol{A}$. Dazu muss die Determinante von $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ null sein.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm j.$$

Bei einem Paar konjugiert komplexer EWs genügt es, einen komplexen EV zu bestimmen. Dazu löst man das homogene LGS $(\boldsymbol{A} - j\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -j & -1 & 0 \\ 1 & -j & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die reellen Fundamentallösungen ergeben sich aus dem Realteil und dem Imaginärteil der komplexen Basislösung

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{jt} \cdot \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + j\sin t) \cdot \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\cos t - \sin t \\ \cos t + j\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$\boldsymbol{x}_h(t) = C_1\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Man bestimmt nun noch eine partikuläre Lösung durch den Ansatz ("$\cos\omega t$, $\sin\omega t$ rein $\Longrightarrow$ Kombination aus $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ raus")

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{bmatrix} A\sin 2t + B\cos 2t \\ C\sin 2t + D\cos 2t \end{bmatrix} \Longrightarrow \dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = \begin{bmatrix} 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \\ 2C\cos 2t - 2D\sin 2t \end{bmatrix}.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \\ 2C\cos 2t - 2D\sin 2t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A\sin 2t + B\cos 2t \\ C\sin 2t + D\cos 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -C\sin 2t - D\cos 2t \\ A\sin 2t + B\cos 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -D\cos 2t + (1-C)\sin 2t \\ (1+B)\cos 2t + A\sin 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der linken und der rechten Seite ergibt sich ein einfaches LGS für A, B, C und D

$$2A = -D,\ -2B = 1 - C,\ 2C = 1 + B,\ -2D = A,$$

mit der Lösung $A = 0$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = 0$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Anfangswerten

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{4}{3}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Lösung 14.31

a) Die Eigenwerte der Systemmatrix lauten

$$\lambda_1 = -2\,, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm \mathrm{i}$$

Damit berechnet man Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -2+\mathrm{i}$. Ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = -2-\mathrm{i}$ ist automatisch ein konjugiert komplexer Eigenvektor zu λ_2:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{i}\,, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Fundamentallösung ergibt sich aus λ_1 und $\boldsymbol{v}_1$. Die zweite aus dem Realteil der komplexen Fundamentallösung aus λ_2 und $\boldsymbol{v}_2$, die dritte aus dem Imaginärteil der komplexen Fundamentallösung aus λ_2 und $\boldsymbol{v}_2$. Man könnte nun meinen, λ_3 und $\boldsymbol{v}_3$ spielen gar keine Rolle. Das ist aber nicht der Fall, denn sowohl Real- als auch Imaginärteil entstehen aus den beiden konjugiert komplexen Fundamentallösungen. Die allgemeine Lösung lautet also

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 4\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

b) Durch Einsetzen der gegebenen Anfangswerte ergibt sich die spezielle Lösung

$$\boldsymbol{x}(t) = 5\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + -2\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 4\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Lösung 14.32

a) Die Systemmatrix und die drei verschiedenen Eigenwerte lauten

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = 0 \, , \quad \lambda_2 = -1 \, , \quad \lambda_3 = -2$$

Damit kann man Eigenvektoren bestimmen:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \, \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \, \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der gegebenen Anfangswerte ergibt sich die Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \, \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Durch Gleichsetzen von x und z ergibt sich

$$\mathrm{e}^{-2t} = 1 - 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = 2\mathrm{e}^{-t} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln \frac{1}{2} = -t \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \ln 2$$

c) Da es nur einen Zeitpunkt t_1 gibt mit

$$z(t_1) = x(t_1) = \mathrm{e}^{-2 \ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \, ,$$

muss dieser Zeitpunkt auch für y geprüft werden:

$$y(t_1) = 2\mathrm{e}^{-\ln 2} - 2\mathrm{e}^{-2 \ln 2} = 2\mathrm{e}^{\ln 2^{-1}} - 2\mathrm{e}^{\ln 2^{-2}} = 2 \cdot 2^{-1} - 2 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$$

Es gibt also keinen Zeitpunkt t_2, zu dem alle drei Zustände gleich sind.

Lösung 14.33

a) Mit $z_1 = x$ und $z_2 = \dot{x}$ lautet das System

$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{z_1} & = & z_2 & , & z_1(0) & = & 0 \\ \dot{z_2} & = & -2(1 + z_1^2) z_2 + 4 z_1 + \cos(3t) & , & z_2(0) & = & 1 \end{array}$$

b) Das Euler-Verfahren liefert

$$\begin{array}{rclcl} x(0.1) & = & z_1(0.1) & = & 0 + 0.1 \cdot 1 = 0.1 \\ \dot{x}(0.1) & = & z_2(0.1) & = & 1 + 0.1 \cdot (-2(1 + 0^2) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1) = 0.9 \end{array}$$

Lösung 14.34

a) Die nichtlineare Differenzialgleichung löst man durch Separation:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -K\sqrt{h} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{K\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = -1\,\mathrm{d}t$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\frac{2}{K}\sqrt{h} = -t + C \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \left(\frac{K(C-t)}{2}\right)^2 = \frac{K^2(C-t)^2}{4}$$

Aus der linken Gleichung mit der Wurzel folgt außerdem $C > 0$. Setzt man den Anfangswert ein, so erhält man

$$64 = \frac{K^2(C-0)^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{16}{K}$$

und damit die Lösung

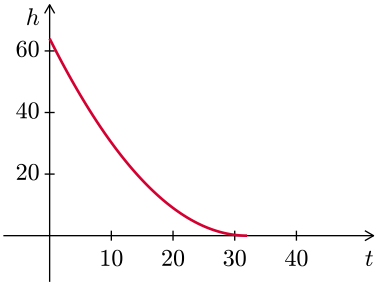
$$h(t) = \frac{K\left(\frac{16}{K} - t\right)}{4} = \frac{(16 - Kt)^2}{4}$$

b) Durch Einsetzen der speziellen Werte ergibt sich

$$K = 0.1 \cdot 5 = 0.5 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad h(t) = \frac{(16-8t)^2}{4} = \frac{(32-t)^2}{16}$$

c) Die Lösungsfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Nullstelle liegt bei $t = 32$. Der Punkt $(32\,|\,0)$ ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel.

d) Das Schaubild der Füllhöhe ist ein Teil einer Parabel. Beim Ablesen der Anfangsfließgeschwindigkeit aus der Abbildung ist Vorsicht geboten. Durch die unterschiedlichen Skalen in t und h ist die Steigung ebenfalls skaliert.



Lösung 14.35

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet

$$v_h(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

b) Eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten ist

$$v_p(t) = \frac{mg}{k}.$$

c) Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist somit

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

d) Berücksichtigt man den Anfangswert $v(0) = 0$, ist

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Lösung 14.36

Bevor wir uns mit dem Lösen der Differenzialgleichung beschäftigen, betrachten wir das Modell noch etwas genauer. Die Differenzialgleichung berüchsichtigt, dass die Gravitation eine konstante Beschleunigung erzeugt, dabei wurde der Einfachheit halber $g \approx 10$ gewählt. Ausserdem ist die Beschleunigung negativ proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Dieses Verhalten kennt man vom cw-Wert. Der Proportionalitätsfaktor hängt im Wesentlichen von der Beschaffenheit des Fallschrims ab. Auch der Wert $\frac{10}{49}$ wurde so gewählt, dass sich die Zahlenwerte bei der Berechnung vereinfachen. Das Vorzeichen der Geschwindigkeit wurden so gewählt, dass einer Fallbewegung eine positive Geschwindigkeiten entspricht.

a) Die Differenzialgleichung ist nichtlinear, lässt sich aber mit Separation lösen

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10\left(1 - \frac{v^2}{49}\right) \Longrightarrow -49\int \frac{1}{v^2 - 7^2}\mathrm{d}v = 10\int \mathrm{d}t.$$

Das linke Integral kann man entweder durch eine Partialbruchzerlegung oder mithilfe der angegebenen Formel lösen

$$-\frac{49}{14}\log\frac{v-7}{v+7} = 10\,t + C.$$

Die Konstante C bestimmt man aus der Anfansgeschwindigkeit $v(0) = 21$

$$-\frac{7}{2}\log\frac{21-7}{21+7} = C \Longrightarrow C = -\frac{7}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{7}{2}\log 2.$$

Die Gleichung

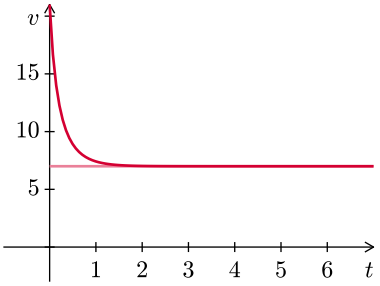
$$\log\frac{v-7}{v+7} = -\frac{20}{7}t - \log 2$$

nach v aufgelöst

$$\frac{v-7}{v+7} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{20}{7}t} \Longrightarrow 2\,v - 14 = (v+7)\mathrm{e}^{-\frac{20}{7}t}$$

ergibt

$$v(t) = 7\,\frac{2 + \mathrm{e}^{-\frac{20}{7}t}}{2 - \mathrm{e}^{-\frac{20}{7}t}}.$$



b) Die Grenzgeschwindigkeit ist

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 7\,\frac{2+0}{2-0} = 7.$$

c) Die Bedingung $v(t) = 8$ liefert

$$\frac{8-7}{8+7} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{20}{7}t} \Longrightarrow t = -\frac{7}{20}\log\left(\frac{2}{15}\right) \approx 0.7.$$

d) Das Euler-Verfahren liefert den Näherungswert

$$v_1 = v_0 + h\left(10 - \frac{10}{49}v_0^2\right) = 21 - 0.8 = 20.2.$$

Der exakte Wert ist

$$v(0.01) = 7\,\frac{2 + \mathrm{e}^{-\frac{0.2}{7}}}{2 - \mathrm{e}^{-\frac{0.2}{7}}} \approx 20.2329.$$

Also liegt ein Fehler von ungefähr 0.0329 vor.

15 Differenzengleichungen

Lösung 15.1
Die ersten Folgenglieder sind

$$(x_k) = 1,\ \frac{7}{3},\ \frac{821}{441},\ \ldots$$

Wenn die Folge gegen einen Grenzwert x konvergiert, dann gilt:

$$x = \frac{2x^3+5}{3x^2} \quad\Longrightarrow\quad 3x^3 = 2x^3+5 \quad\Longrightarrow\quad x^3 = 5 \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt[3]{5} \approx 1.7099759$$

Die Zahlenfolge stellt also eine Möglichkeit dar, $\sqrt[3]{5}$ durch rationale Zahlen anzunähern.

Lösung 15.2
Die ersten Folgenglieder sind

$$(x_k) = 3,\ 10,\ 24,\ 52,\ 108,\ \ldots$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differenzengleichung erster Ordnung mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda - 2 = 0$$

und dem Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Somit lautet die homogene Lösung

$$x_k^{(h)} = C \cdot 2^k\,.$$

Für die konstante Störfunktion wählen wir für eine partikuläre Lösung den Ansatz

$$x_k^{(p)} = A\,.$$

Eingesetzt in die Differenzengleichung ergibt sich:

$$A = 2A + 4 \quad\Longrightarrow\quad A = -4\,.$$

Die Konstante C ermittelt man aus dem Anfangswert:

$$k = 0: \quad C - 4 = 3 \quad\Longrightarrow\quad C = 7\,.$$

Die gesuchte Formel ist

$$x_k = 7 \cdot 2^k - 4\,.$$

Lösung 15.3
Die ersten Folgenglieder sind

$$(x_k) = 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4},\ \frac{23}{8},\ \ldots$$

Es handelt sich um eine lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

und den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Somit lautet die homogene Lösung

$$x_k^{(h)} = C_1 + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Die beiden Konstanten C_1 und C_2 ermittelt man aus den Anfangswerten:

$$\begin{array}{lrcrcl} k=0: & C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ k=1: & C_1 & + & \frac{1}{2}C_2 & = & 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 3,\, C_2 = -2\,.$$

Die gesuchte Formel ist

$$x_k = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} .$$

Lösung 15.4

Die Fibonacci-Folge wird durch die lineare homogene Differenzengleichung der Ordnung 2

$$x_{k+2} - x_{k+1} - x_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit den Anfangswerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ beschrieben. Aus der charakteristischen Gleichung erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Damit lässt sich die Lösung in der Form

$$x_k = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

darstellen. Die Konstanten C_1 und C_2 ermitteln wir aus den Anfangswerten. Für $k = 0$ ergibt sich

$$x_0 = 0 = C_1 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -C_1$$

und für $k = 1$ erhalten wir

$$x_1 = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = C_1 \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Die Folgenglieder der Fibonacci-Folge sind natürliche Zahlen. Um die Skepsis, dass sich diese Zahlen mit der Formel

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

berechnen lassen, zu überwinden, lohnt es sich ein paar konkrete Zahlenwerte mit dem Computer zu berechnen.

Lösung 15.5

a) Vektor-Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung und Eigenwerte

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tfrac{5}{2}\lambda - \tfrac{3}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Eigenvektor für $\lambda_1 = 3$:

$$\left.\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor für $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1\, 3^k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Bedingung für Fixpunkt: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$

$$\left.\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & -6 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 5 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Anfangswerte dürfen nur in Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ vom Startwert abweichen:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 15.6

Es handelt sich um ein Annuitätendarlehen mit einer Kreditsumme $S_0 = 100\,000$ und Zinsfaktor $q = 1.05$. Die Restschuld S_{10} nach $k = 10$ Jahren beträgt

$$S_{10} = q^{10} S_0 - \frac{1-q^{10}}{1-q} R$$

Damit ergibt sich die jährliche Rate

$$R = q^{10} S_0 \frac{1-q}{1-q^{10}} = 1.05^{10} \cdot 100\,000 \cdot \frac{-0.05}{1-1.05^{10}} \approx 12\,950.46\,.$$

16 Fourier-Reihen

Lösung 16.1

Die Funktion $f(t) = \sin^2(t)$ hat die Periode π und ist gerade, somit besteht ihre Fourier-Reihe lediglich aus Kosinusanteilen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2t) + a_2 \cos(4t) + \dots$$

Außerdem wissen wir, dass die Fourier-Reihe lediglich ein trigonometrisches Polynom vom Grad 2 ist. Somit müssen wir nur a_0 und a_1 bestimmen, die restlichen Koeffizienten a_k sind alle Null. Aufwendige Berechnungen der Fourier-Koeffizienten mithilfe von Integralen kann man sich sparen, wenn man die Doppelwinkelformel

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$$

verwendet. Denn damit gilt

$$f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Die Berechnung mit den Integralformeln

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\left[t - \cos t \sin t\right]_0^\pi = 1$$

und

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{16\pi}\left[4\sin(2t) - \sin(4t) - t\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}$$

liefern dasselbe Ergebnis.

Die Fourier-Reihe der Funktion $g(t) = \cos^2(t)$ lässt sich direkt aus der Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = \sin^2(t)$ herleiten

$$g(t) = \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Die Funktion $h(t) = \sin^3(t)$ hat die Periode 2π und ist ungerade, somit besteht ihre Fourier-Reihe lediglich aus Sinusanteilen und ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad 3

$$h(t) = b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t).$$

Die Koeffizienten b_1, b_2 und b_3 lassen sich mithilfe der Integralformeln berechnen. Allerdings gibt es auch hier eine einfachere Lösung. Wenn man für t die Werte $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{4}$ in die Gleichung

$$\sin^3(t) = b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t)$$

einsetzt ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten b_1, b_2 und b_3

$$\begin{array}{lcccccc}
t = \frac{\pi}{2}: & 1 & = & b_1 & & - & b_3 \\
t = \frac{\pi}{3}: & \frac{3\sqrt{3}}{8} & = & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,b_1 & + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,b_2 & & \\
t = \frac{\pi}{4}: & \frac{2\sqrt{2}}{8} & = & \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b_1 & + b_2 & + & \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b_3
\end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $b_1 = \frac{3}{4}$, $b_2 = 0$ und $b_3 = -\frac{1}{4}$. Die Fourier-Reihe lautet also

$$h(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).$$

Lösung 16.2

Wenn man die Funktion f um den Mittelwert $m = \frac{3}{2}$ nach unten verschiebt ergibt sich eine Rechteckfunktion

$$h_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für} \quad -\pi < t \le 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad 0 < t \le \pi, \end{cases} \qquad h_1(t+2\pi) = h_1(t).$$

Zwischen dieser Hilfsfunktion h_1 und der Funktion f besteht der Zusammenhang

$$h_1(t) = f(t) - \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{3}{2} + h_1(t).$$

Nun verschieben wir die erste Hilfsfunktion h_1 um π

$$h_2(t) = h_1(t-\pi) \quad \Longrightarrow \quad h_1(t) = h_2(t+\pi).$$

Die zweite Hilfsfunktion h_2 skalieren wir mit dem Faktor 2 und ersetzen t durch $\pi\, t$

$$g(t) = 2\, h_2(\pi\, t) \quad \Longrightarrow \quad h_2(t) = \frac{1}{2}\, g\left(\frac{t}{\pi}\right).$$

In Summe gilt

$$f(t) = \frac{3}{2} + h_1(t) = \frac{3}{2} + h_2(t+\pi) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} g\left(\frac{t+\pi}{\pi}\right).$$

Für g kennen wir die Fourier-Reihe

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi\, t + \frac{1}{3}\sin 3\pi\, t + \frac{1}{5}\sin 5\pi\, t + \ldots\right)$$

und somit ist

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\left(t+\pi\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\, t + 3\pi\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\, t + 5\pi\right) + \ldots\right).$$

Um zu einer gültigen Darstellung für eine Fourier-Reihe zu gelangen müssen wir die Verschiebungen eliminieren

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3\, t + \frac{1}{5}\sin 5\, t + \ldots\right).$$

Lösung 16.3

Wir ersetzen in der Fourier-Reihe von $g(t)$ den Parameter t durch $t \cdot \frac{2\pi}{T} = t \cdot \omega$

$$g(t\cdot\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(\cos\left(t\cdot\omega\right) + \frac{1}{9}\cos\left(3t\cdot\omega\right) + \frac{1}{25}\cos\left(5t\cdot\omega\right) + \ldots\right).$$

Da $f(t)$ die Amplitude $\frac{T}{2}$ hat und $g(t)$ die Amplitude π muss die Amplitude mit dem Faktor $\dfrac{T}{2\pi}$ skaliert werden. Zwischen $f(t)$ und $g(t)$ besteht also der Zusammenhang

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} g(t\cdot\omega)$$

und es folgt

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2}\cdot\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega t) + \ldots\right).$$

Lösung 16.4

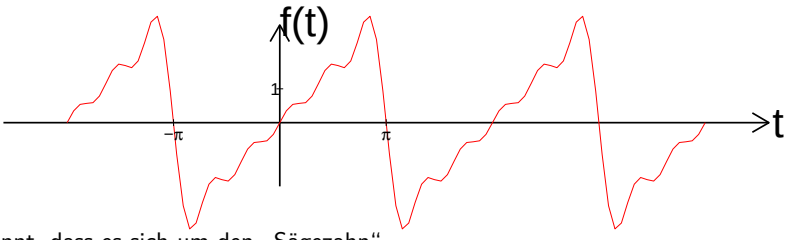
Es ist

$$a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = 0, \quad b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = -2\frac{(-1)^k}{k}$$

und damit

$$f(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{5}\sin 5t \ldots\right).$$

Die Funktion $f(t)$ muss ungerade und unstetig sein. Die Reihe bis zur Ordnung 5 zeigt die Skizze.



Man erkennt, dass es sich um den „Sägezahn“

$$f(t) = t, \quad -\pi \le t < \pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

handelt.

Lösung 16.5

Lösung 16.6

Die Fourier-Reihe von $g(x)$ ist laut Tabelle

$$g(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2\,x + \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{9}\cos 6x + \ldots\right).$$

Die Transformation $x = t \cdot \frac{\pi}{2}$ bildet den t-Bereich zwischen 0 und 2 auf das Intervall $[0, \pi]$ für x ab. Da $f(t)$ die Amplitude 1 hat und $g(x)$ die Amplitude $\frac{\pi^2}{4}$ muss die Amplitude mit dem Faktor $\frac{4}{\pi^2}$ skaliert werden. Zwischen $f(t)$ und $g(x)$ besteht also der Zusammenhang

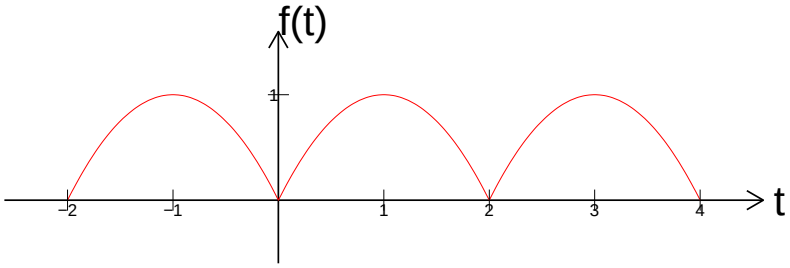
$$f(t) = \frac{4}{\pi^2} g(t \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2} g(t \cdot \frac{\omega}{2})$$

und es folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\cos(2t \cdot \frac{\omega}{2}) + \frac{1}{4}\cos(4t \cdot \frac{\omega}{2}) + \frac{1}{9}\cos(6t \cdot \frac{\omega}{2}) + \ldots\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\cos(t\omega) + \frac{1}{4}\cos(2t\omega) + \frac{1}{9}\cos(3t\omega) + \ldots\right). \end{aligned}$$

Lösung 16.7

a) $T = 2$, $\omega = \pi$.



b) Den Mittelwert berechnet man aus der Integralformel

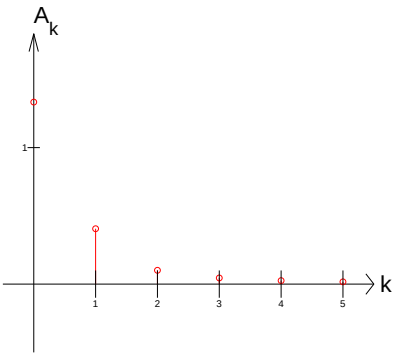
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 -t(t-2)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}.$$

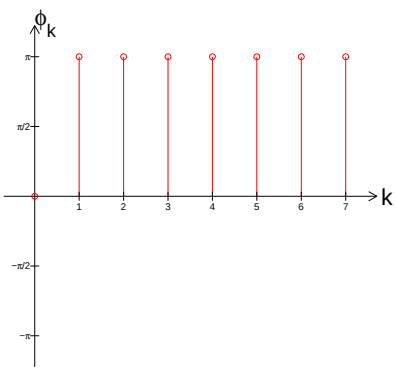
Die Funktion ist gerade, deshalb sind alle b_k null. Die a_k berechnet man für $k > 0$ aus der Integralformel

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 -t(t-2)\cdot\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{-4}{\pi^2 k^2}.$$

c) Es ist $A_0 = |a_0| = \frac{4}{3}$ und für $k > 0$ ist a_k negativ, deshalb gilt:

$A_k = |a_k| = \frac{4}{\pi^2 k^2}$ $\qquad$ $\varphi_k = \pi$

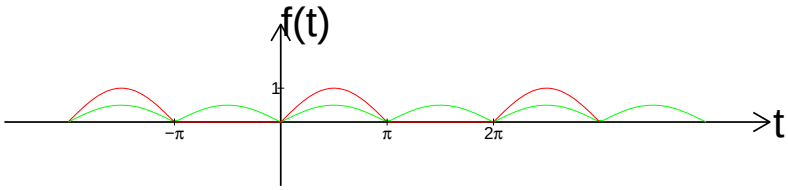




Die Amplitude klingt proportional zu $\frac{1}{k^2}$ ab und die Phasenwinkel sind π.

Lösung 16.8

a) $T = 2\pi$, $\omega = 1$.



b) Den Mittelwert berechnet man aus der Integralformel

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

Die a_k berechnet man für $k > 0$ aus der Integralformel

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\cos(kt)\,\mathrm{d}t.$$

Für $k = 1$ ergibt sich aus der Symmetrie von $\cos$ und $\sin$ bezüglich $\frac{\pi}{2}$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Mithilfe einiger Tricks lässt sich das Integral für $k > 1$ durch partielle Integration berechnen:

$$I = \int \underbrace{\sin(t)}_{g'}\,\underbrace{\cos(kt)}_{f}\,\mathrm{d}t = \underbrace{-\cos(t)}_{g}\,\underbrace{\cos(kt)}_{f} - \int \underbrace{(-\cos(t))}_{g}\,\underbrace{(-k\sin(kt))}_{f'}\,\mathrm{d}t.$$

Der erste Trick besteht darin, hartnäckig zu bleiben und auf das Integral im Zwischenergebnis nochmals die Regel der partiellen Integration anzuwenden:

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{g'}\,\underbrace{\sin(kt)}_{f}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sin(t)}_{g}\,\underbrace{\sin(kt)}_{f} - \int \underbrace{\sin(t)}_{g}\,\underbrace{k\cos(kt)}_{f'}\,\mathrm{d}t = \sin(t)\,\sin(kt) - k\,I.$$

Dadurch, dass nach zweimaliger partieller Integration wieder das ursprüngliche Integral I auftaucht, hat man den Eindruck, dass man ergebnislos im Kreis gerechnet hat. Dieser Eindruck täuscht jedoch, denn insgesamt erhält man:

$$I = -\cos(t)\,\cos(kt) - k\,\sin(t)\,\sin(kt) + k^2\,I.$$

Die Gleichung

$$(1-k^2)I = -\cos(t)\,\cos(kt) - k\,\sin(t)\,\sin(kt)$$

nach I auflösen ergibt:

$$I = \int \sin(t)\,\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(t)\,\cos(kt) + k\,\sin(t)\,\sin(kt)}{k^2-1}.$$

Damit können wir a_k für $k > 1$ ermitteln:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\cos(t)\,\cos(kt) + k\,\sin(t)\,\sin(kt)}{k^2-1}\right|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi(k^2-1)}.$$

Die b_k berechnet man für $k > 0$ aus der Integralformel

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{für } k > 1 \end{cases}.$$

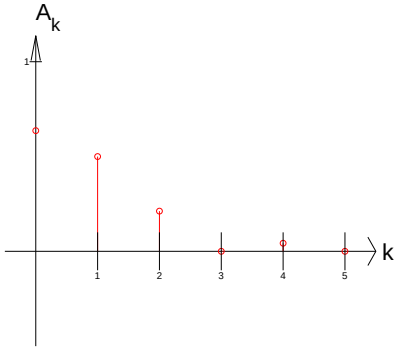
Dabei haben wir die Formel

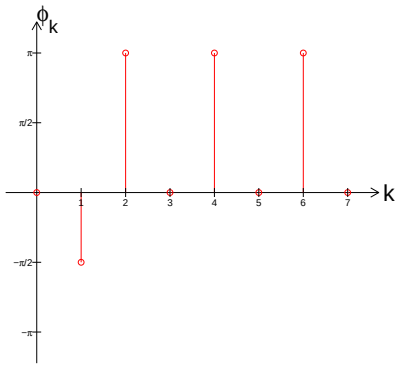
$$\int \sin(t)\,\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{\cos(t)\,\sin(kt) - k\,\sin(t)\,\cos(kt)}{k^2 - 1}$$

verwendet, die sich analog zu der oben beschriebenen Vorgehensweise durch zweimaliges partielles Integrieren herleiten lässt. Es ist also nur b_1 von null verschieden und $f(t) - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}|\sin t|$ eine gerade Funktion, siehe Skizze.

c) Es ist $A_0 = |a_0| = \frac{2}{\pi}$, $A_1 = |b_1| = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ und für $k > 1$ gilt

$$A_k = |a_k| == \begin{cases} 0 & \text{für } k = 3, 5, 7, \ldots \\ \frac{2}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \qquad \varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 3, 5, 7, \ldots \\ \pi & \text{für } k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

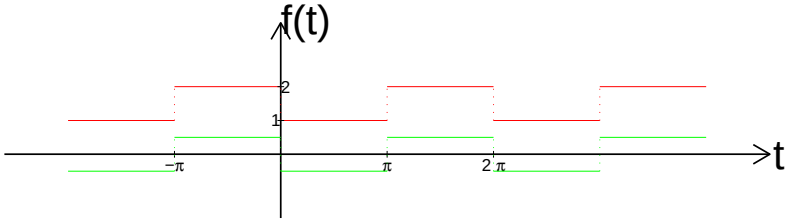




Die Amplitude klingt proportional zu $\frac{1}{k^2}$ ab und die Phasenwinkel sind außer für $k = 1$ immer 0 oder π.

Lösung 16.9

a) $T = 2\pi$, $\omega = 1$.



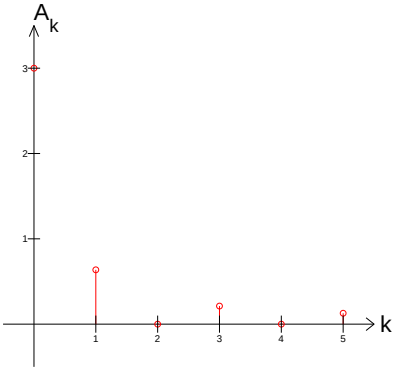
b) Den Mittelwert $\frac{3}{2}$ kann man direkt aus der Skizze ablesen. Dadurch ergibt sich $a_0 = 3$. Die um den Mittelwert nach unten verschobene Funktion ist ungerade, deshalb sind alle a_k null.

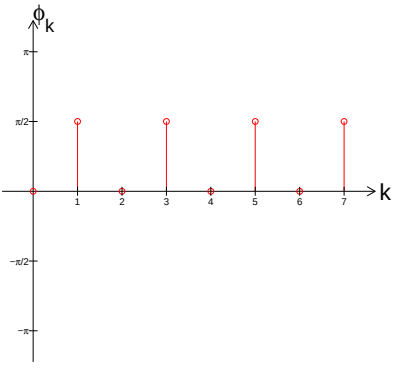
Die b_k berechnet man aus der Integralformel

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cdot\sin(kt)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(kt)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{(-1)^k-1}{\pi k}.$$

c) Es ist $A_0 = |a_0| = 3$ und für $k > 0$ ist $a_k = 0$. Für gerades k ist $b_k = 0$ und für ungerades k ist $b_k = \frac{-2}{\pi k}$. Somit gilt:

$$A_k = |b_k| = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2,4,6,\ldots \\ \frac{2}{\pi k} & \text{für } k = 1,3,5,\ldots \end{cases} \qquad \varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2,4,6,\ldots \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

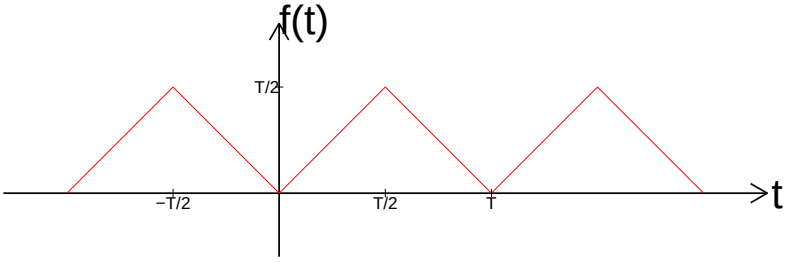




Die Amplitude klingt wegen der Unstetigkeit nur proportional zu $\frac{1}{k}$ ab und die Phasenwinkel sind 0 bzw. $\frac{\pi}{2}$.

Lösung 16.10

a) $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

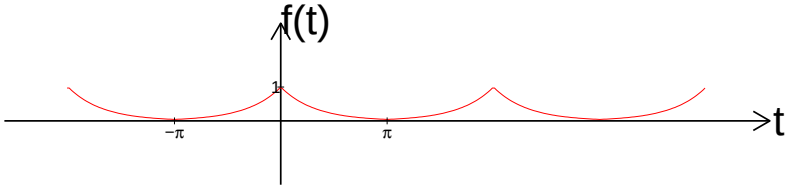


b) Den Mittelwert $\frac{T}{4}$ kann man direkt aus der Skizze ablesen. Dadurch ergibt sich $a_0 = \frac{T}{2}$. Die Funktion ist gerade, deshalb sind alle b_k null. Die a_k berechnet man für $k > 0$ aus der Integralformel

$$a_k = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -t\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{T}{2}} t\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{T((-1)^k-1)}{\pi^2 k^2}.$$

Lösung 16.11

a) $T = 2\pi$, $\omega = 1$.



b) Die komplexen Fourierkoeffizienten berechnet man aus der Integralformel

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}k)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)t}}{1-\mathrm{i}k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}k)t}}{-1-\mathrm{i}k}\Big|_{0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}k)\pi}}{1-\mathrm{i}k} + \frac{\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}k)\pi}-1}{-1-\mathrm{i}k}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k}{1-\mathrm{i}k} + \frac{-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k+1}{1+\mathrm{i}k}\right)\\
&= \frac{1-(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die reellen Koeffizienten

$$a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = \frac{2(1-(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+k^2)}$$

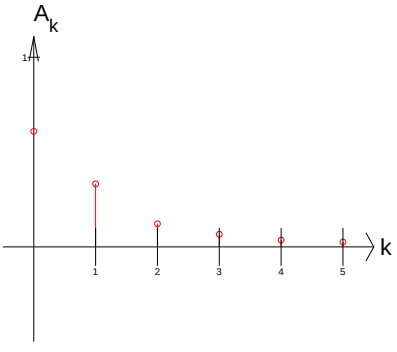
und die Fourier-Reihe

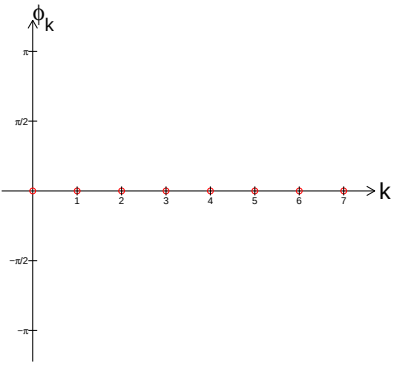
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{1} + \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cos t + \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{5}\cos 2t + \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{10}\cos 3t + \ldots\right)$$

Da $f(t)$ gerade ist muss c_k rein reell sein und b_k ist für alle k null. Aufgrund der Stetigkeit klingt a_k proportional zu $\dfrac{1}{k^2}$ ab.

c) Für die Amplitude und die Phasenwinkel gilt

$$A_k = 2|c_k| = \tfrac{2(1-(-1)^k\mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+k^2)}, \qquad \varphi_k = 0.$$

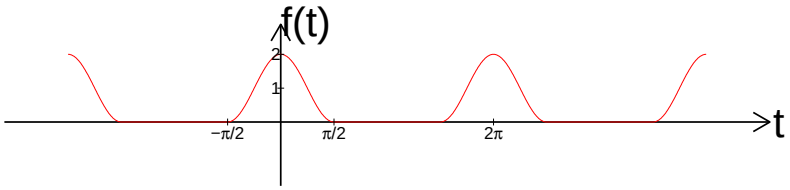




Die Amplitude klingt proportional zu $\frac{1}{k^2}$ ab und die Phasenwinkel sind immer null.

Lösung 16.12

a) $T = 2\pi$, $\omega = 1$.



b) Den Mittelwert berechnet man aus der Integralformel

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

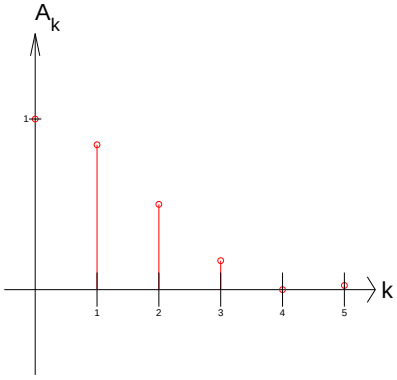
Die a_k berechnet man für $k > 0$ aus der Integralformel

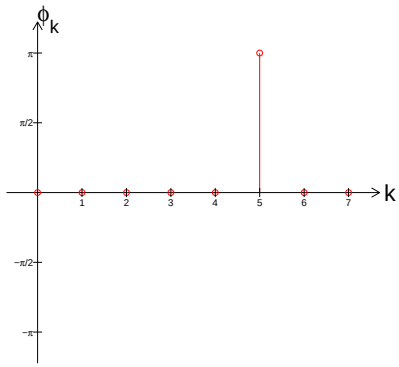
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{-8\sin(k\frac{\pi}{2})}{\pi k(k^2-4)}$$

Dabei gilt diese Formel nur für $k \neq 2$. Für $k = 2$ ergibt sich $a_2 = \frac{1}{2}$. Alle b_k sind null, da die Funktion gerade ist.

c) Es ist $A_0 = |a_0| = 1$, $A_2 = |a_2| = \frac{1}{2}$,

$$A_k = |a_k| == \begin{cases} \frac{8}{\pi k(k^2-4)} & \text{für } k = 1,3,5,\ldots \\ 0 & \text{für } k = 4,6,8,\ldots \end{cases} \qquad \varphi_k = \begin{cases} \pi & \text{für } k = 5,9,13,\ldots \\ 0 & \text{für } k = 0,1,2,3,4,6,\ldots \end{cases}$$





Die Amplitude klingt proportional zu $\frac{1}{k^3}$ ab und die Phasenwinkel sind für $k = 5,9,13,\ldots$ π und sonst immer null.

Lösung 16.13

$g(t)$ ist die negative Ableitung von $f(t)$, dabei betrachten wir die Nahtstellen $-\frac{\pi}{2} \pm k \cdot \pi$, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist, nicht. Die Fourier-Reihe von $g(t)$ erhalten wir durch gliedweises Ableiten der Fourierreihe von $f(t)$

$$\begin{aligned} g(t) = -f'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{8}{15\pi}\cos 3t - \frac{8}{105\pi}\cos 5t \ldots\right) \\ &= \left(-\frac{8}{3\pi}\sin t - \sin 2t - \frac{8}{5\pi}\sin 3t + \frac{8}{21\pi}\sin 5t \ldots\right). \end{aligned}$$

17 Verallgemeinerte Funktionen

Lösung 17.1

a) Die Funktion $f(t)$ ist für $t = 0$ unstetig und für $t = 0$ und $t = -T$ nicht differenzierbar.

b) Die Funktion $f(t)$ kann man als Produkt einer Geraden

$$g(t) = \frac{1}{T}(t+T)$$

mit einem Rechteck, das bei $-T$ beginnt und bei 0 endet

$$r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t)$$

darstellen. Somit gilt

$$f(t) = g(t) \cdot r(t) = \frac{1}{T}(t+T)\left(\sigma(t+T) - \sigma(t)\right).$$

c) Nach der Produktregel gilt

$$\dot{f}(t) = \dot{g}(t) \cdot r(t) + g(t) \cdot \dot{r}(t) = \frac{1}{T}\left(\sigma(t+T) - \sigma(t)\right) + \frac{1}{T}(t+T)\left(\delta(t+T) - \delta(t)\right).$$

Aufgrund der Eigenschaften der δ-Distribution ergeben sich weitere Vereinfachnungen. Die Umformungen

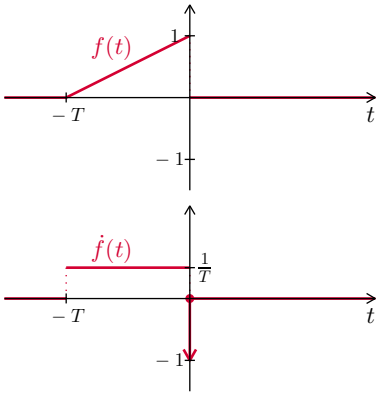
$$\frac{1}{T}(t+T)\delta(t+T) = \frac{1}{T}(-T+T)\delta(t+T) = 0,$$

und

$$-\frac{1}{T}(t+T)\delta(t) = -\frac{1}{T}(0+T)\delta(t) = -\delta(t)$$

ergeben

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{T}\left(\sigma(t+T) - \sigma(t)\right) - \delta(t).$$



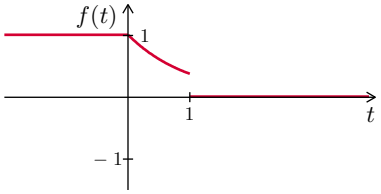
d) Für t-Werte, die kleiner als $-T$ oder größer als 0 sind, ist die Funktion f Null und somit ist dort auch die Ableitung Null. Zwischen $-T$ und 0 hat die Funktion f die konstante Steigung $\frac{1}{T}$ und somit hat die Ableitung dort auch den konstanten Wert $\frac{1}{T}$. An der Stelle 0 springt die Funktion f um den Wert 1 nach unten. Dieser Sprung erzeugt einen Impuls der Länge -1 bei der Ableitung.

Lösung 17.2

a) Siehe Skizze!

b) Die Funktion $f(t)$ ist für $t = 1$ unstetig für $t = 1$ und $t = 0$ nicht differenzierbar.

c) Die Funktion $f(t)$ besteht aus zwei Teilen. Den Teil für negative t-Werte kann man mit $\sigma(-t)$ darstellen. Den zweiten Teil kann man als Produkt einer Exponentialfunktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$ mit einem Rechteck, das bei 0 beginnt und bei 1 endet



$$r(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$$

darstellen. Somit gilt

$$f(t) = \sigma(-t) + g(t)\,r(t) = \sigma(-t) + \mathrm{e}^{-t}\left(\sigma(t) - \sigma(t-1)\right).$$

d) Nach der Produktregel gilt

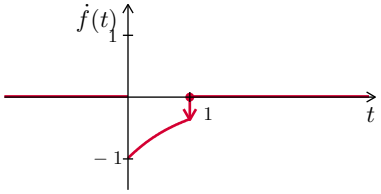
$$\dot{f}(t) = -\delta(-t) + \dot{g}(t)\cdot r(t) + g(t)\cdot \dot{r}(t) = -\delta(t) - \mathrm{e}^{-t}\left(\sigma(t) - \sigma(t-1)\right) + \mathrm{e}^{-t}\left(\delta(t) - \delta(t-1)\right).$$

Aufgrund der Eigenschaften der δ-Distribution ergeben sich weitere Vereinfachungen. Die Umformungen

$$\mathrm{e}^{-t}\delta(t) = \mathrm{e}^{-0}\delta(t) = \delta(t),$$

und

$$-\mathrm{e}^{-t}\delta(t-1) = -\mathrm{e}^{-1}\delta(t-1)$$



ergeben

$$\dot{f}(t) = -\delta(t) - \mathrm{e}^{-t}\left(\sigma(t) - \sigma(t-1)\right) + \delta(t) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t-1) = -\mathrm{e}^{-t}\left(\sigma(t) - \sigma(t-1)\right) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t-1).$$

In Übereinstimmung mit der Skizze ergibt sich bei der Ableitung nur ein einziger Dirac-Impuls der Länge $-\mathrm{e}^{-1}$ an der Stelle $t = 1$.

Lösung 17.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-1)\cdot \mathrm{e}^{-|\tau|}\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-1)\cdot \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-1)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-1}.$$

Lösung 17.4

Die Faltung ist definiert durch

$$f(t) = g(t) \star r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|}\, r(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Um das Problem mit dem Betrag zu umgehen, zerlegen wir das Integral in zwei Teile

$$f(t) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau}\, r(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\, r(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Für einen festen t-Wert betrachten wir die Funktion $r(t-\tau)$ als Funktion der Variablen τ. Durch $r(\tau) \to r(t+\tau)$ wird das Rechteck dabei zunächst um den Wert t nach links verschoben und dann durch $r(t+\tau) \to r(t-\tau)$ an der y-Achse gespiegelt. Die Rechteckfunktion $r(t-\tau)$ hat also für τ-Werte zwischen $t-1$ und $t+1$ den Wert 1 und ist sonst überall null. Somit sind insgesamt drei Fälle zu betrachten.
Für $t < -1$ gilt

$$f(t) = \int_{t-1}^{t+1} \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{t+1} - \mathrm{e}^{t-1}.$$

Für $-1 \le t \le 1$ gilt

$$f(t) = \int_{t-1}^{0} \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{t+1} \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = 1 - \mathrm{e}^{t-1} - \mathrm{e}^{-t-1} + 1.$$

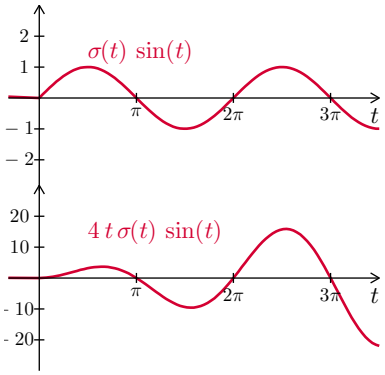
Für $t > 1$ gilt

$$f(t) = \int_{t-1}^{t+1} \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = -\mathrm{e}^{-t-1} + \mathrm{e}^{1-t}.$$

Lösung 17.5

Die Faltung berechnet man aus dem Integral

$$f(t) = \int_0^t 4\,\tau\,\sin\tau\,\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



Das einzige Problem stellt nur noch die Berechnung dieses Integrals dar.
Der Integrand lässt sich mit dem Additionstheorem für den Sinus $\sin(t-\tau) = \sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau$ umformen. Dann kann man das Integral in die Summe aus zwei Teilintegralen zerlegen und die Faktoren, die nicht von τ abhängen, vor das Integral ziehen. Die Ausdrücke $\sin\tau\cos\tau$ und $\sin^2\tau$ lassen sich mithilfe der Doppelwinkelformeln weiter umformen

$$f(t) = 4\,\sin t \int_0^t \tau\,\underbrace{\sin\tau\cos\tau}_{\frac{1}{2}\sin(2\tau)}\,\mathrm{d}\tau - 4\,\cos t \int_0^t \tau\,\underbrace{\sin^2\tau}_{\frac{1}{2}(1-\cos(2\tau))}\,\mathrm{d}\tau.$$

Dadurch ergibt sich

$$f(t) = 2\,\sin t \int_0^t \tau\,\sin(2\tau)\,\mathrm{d}\tau - 2\,\cos t\left(\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \tau\cos(2\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Diese Integrale lassen sich durch Stammfunktionen bestimmen

$$f(t) = \sin t\left[\frac{1}{2}\sin(2\tau) - \tau\cos(2\tau)\right]_0^t - \cos t\left(\left[\tau^2\right]_0^t - \left[\frac{1}{2}\cos(2\tau) + \tau\sin(2\tau)\right]_0^t\right)$$

Einsetzen der Grenzen liefert

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin t\sin(2t) - t\sin t\cos(2t) - t^2\cos t + \frac{1}{2}\cos t\cos(2t) + t\cos t\sin(2t) - \frac{1}{2}\cos t.$$

Mithilfe der Doppelwinkelformeln ergeben sich weitere Vereinfachungen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2 t \cos t - t \sin t \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) - t^2 \cos t + \tfrac{1}{2} \cos t \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) + \\ &\quad 2t \cos^2 t \sin t - \tfrac{1}{2} \cos t \\ &= t \sin t (\underbrace{\sin^2 t - \cos^2 t + 2\cos^2 t}_{1}) + \tfrac{1}{2} \cos t (\underbrace{2\sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t}_{1} - 1) - \\ &\quad t^2 \cos t \\ &= t \sin t - t^2 \cos t. \end{aligned}$$

Lösung 17.6

ToDo!

18 Fourier-Transformation

Lösung 18.1

Die Funktion $s(t)$ können wir aus dem Standardrechteck

$$r(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$$

erzeugen, indem wir das Standardrechteck stauchen

$$\tilde{r}(t) = r(2\,t)$$

und dann um $\frac{1}{2}$ nach rechts verschieben

$$s(t) = \tilde{r}(t - \frac{1}{2}) = r(2\,t-1).$$

Wir müssen also zuerst den Zeitdehnungssatz auf die Fourier-Transformation des Standardrechtecks

$$R(f) = \frac{\sin(2\,\pi\,f)}{\pi\,f}$$

anwenden

$$\tilde{R}(f) = \frac{R(\frac{f}{2})}{|2|} = \frac{\sin(2\,\pi\,\frac{f}{2})}{2\,\pi\,\frac{f}{2}} = \frac{\sin(\pi\,f)}{\pi\,f}$$

und dann noch den Zeitverschiebungssatz

$$S(f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\,\frac{f}{2}}\,\tilde{R}(f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\,f}\,\frac{\sin(\pi\,f)}{\pi\,f}.$$

Lösung 18.2

Mit dem Rechteck, das bei -2 startet und bei 2 endet

$$r_1(t) = \sigma(t+2) - \sigma(t-2)$$

und dem Standardrechteck

$$r_2(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$$

kann man die Funktion $s(t)$ durch

$$s(t) = r_1(t) - r_2(t)$$

darstellen. Aufgrund der Linearität gilt

$$S(f) = R_1(f) - R_2(f)$$

Die Fourier-Transformation des Standardrechtecks kennen wir

$$R_2(f) = \frac{\sin(2\,\pi\,f)}{\pi\,f}$$

und die Fourier-Transformation von $r_1(t)$ erhalten wir wegen

$$r_1(t) = r_2(\frac{t}{2})$$

aus dem Zeitdehnungsatz

$$R_1(f) = \frac{R_2(2f)}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\frac{\sin(2\pi 2f)}{\pi 2f} = \frac{\sin(4\pi f)}{\pi f}.$$

Somit gilt

$$S(f) = \frac{\sin(4\pi f)}{\pi f} - \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f} = \frac{\sin(4\pi f) - \sin(2\pi f)}{\pi f}.$$

Lösung 18.3

a) Die verallgemeinerten Ableitungen $\dot{s}$ kann man direkt aus der Grafik ablesen. Zwischen $-a$ und 0 hat s die Steigung $\frac{A}{a}$ und zwischen 0 und a die Steigung $-A/a$, somit gilt

$$\dot{s}(t) = \frac{A}{a}(\sigma(t+a) - \sigma(t)) - \frac{A}{a}(\sigma(t) - \sigma(t-a)) = \frac{A}{a}(\sigma(t+a) - 2\sigma(t) + \sigma(t-a))$$

und

$$\ddot{s}(t) = \frac{A}{a}(\delta(t+a) - 2\delta(t) + \delta(t-a)).$$

b) Mithilfe der Korrespondenz $\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$, der Linearität und dem Zeitverschiebungssatz erhalten wir

$$\ddot{s}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{A}{a}\left(e^{i2\pi f a}\cdot 1 - 2\cdot 1 + e^{-i2\pi f a}\cdot 1\right) = \frac{2A}{a}\left(\frac{e^{i2\pi f a} + e^{-i2\pi f a}}{2} - 1\right) = \frac{2A}{a}(\cos(2\pi f a)$$

c) Der Differenziation in der Zeit entspricht die Multiplikation mit dem Faktor $i2\pi f$ in der Frequenz. Umgekehrt müssen wir also die Fourier-Transformation von $\ddot{s}(t)$ zwei mal durch diesen Faktor teilen um die Fourier-Transformation von $s(t)$ zu bestimmen

$$s(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2A\frac{\cos(2\pi f a) - 1}{-4\pi^2 f^2 a} = A\frac{1 - \cos(2\pi f a)}{2\pi^2 f^2 a}.$$

Lösung 18.4

Das Standardrechteck

$$r(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$$

und das Standarddreieck

$$d(t) = (1+t)[\sigma(t+1) - \sigma(t)] + (1-t)[\sigma(t) - \sigma(t-1)]$$

werden jeweils mit dem Faktor 2 multipliziert und um den Faktor 2 gedehnt. Dadurch erhalten wir

$$s(t) = 2\,r(\frac{t}{2}) + 2\,d(\frac{t}{2}).$$

Die Fouriertransformation S von s erhalten wir aufgrund der Linearität und dem Zeitdehnungsatz

$$S(f) = 2\,\frac{\sin(2\pi(2f))}{\left|\frac{1}{2}\right|\pi(2f)} + 2\,\frac{1-\cos(2\pi(2f))}{\left|\frac{1}{2}\right|2\pi^2(2f)^2} = 2\,\frac{\sin(4\pi f)}{\pi f} + \frac{1-\cos(4\pi f)}{2\pi^2 f^2}.$$

Lösung 18.5

a)

Lösung 18.6

a) Die Funktion $s(t)$ besteht aus zwei σ-Funktionen

$$s(t) = \sigma(t-T) - \sigma(-t-T),$$

dabei entsteht die negative σ-Funktion aus der positiven σ-Funktion durch Zeitumkehr $t \to -t$ und durch Spiegeln an der t-Achse.

b) Wir verwenden die bekannte Korrespondenz

$$\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

Die Fourier-Transformation von $\sigma(t-T)$ erhalten wir dann mit dem Zeitverschiebungssatz

$$\sigma(t-T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}\left(\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right)$$

Mit der Vereinfachung

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}\delta(f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi 0 T}\delta(f) = \delta(f)$$

ergibt sich

$$\sigma(t-T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}}{2\,\mathrm{i}\,\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

Die Fourier-Transformation von $\sigma(-t-T)$ bestimmen wir mithilfe des Satzes über die Zeitumkehr

$$\sigma(-t-T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi(-f)T}}{2\,\mathrm{i}\,\pi(-f)} + \frac{1}{2}\delta(-f) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi f T}}{-2\,\mathrm{i}\,\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Insgesamt erhalten wir

$$s(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}}{2\,\mathrm{i}\,\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi f T}}{-2\,\mathrm{i}\,\pi f} - \frac{1}{2}\delta(f) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi f T} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}}{2\,\mathrm{i}\,\pi f} = \frac{\cos(2\pi f T)}{\mathrm{i}\,\pi f}.$$

c) Die Fouriertransformation der verallgemeinerten Ableitung erhalten wir mit dem Differenziationssatz in der Zeit

$$\dot{s}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\,2\,\pi\,f)\,\frac{\cos(2\,\pi\,f\,T)}{\mathrm{i}\,\pi\,f} = 2\cos(2\,\pi\,f\,T).$$

Lösung 18.7

Die entsprechende Zeitfunktion $d(t)$ lässt sich als Differenz von zwei Dreiecken darstellen

$$d(t) = d_1(t) - d_2(t).$$

Die Transformation eines Dreiecks setzen wir als bekannt voraus

$$d_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 3\,\frac{A}{2}\,\frac{1-\cos(2\,\pi\,f\,(3\,f_0))}{2\,\pi^2\,f^2\,(3\,f_0)} = A\,\frac{1-\cos(6\,\pi\,f\,f_0)}{4\,\pi^2\,f^2\,f_0}$$

und

$$d_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{A}{2}\,\frac{1-\cos(2\,\pi\,f\,f_0)}{2\,\pi^2\,f^2\,f_0} = A\,\frac{1-\cos(2\,\pi\,f\,f_0)}{4\,\pi^2\,f^2\,f_0}$$

Aufgrund der Linearität erhalten wir

$$d(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad D(f) = A\,\frac{\cos(2\,\pi\,f\,f_0)-\cos(6\,\pi\,f\,f_0)}{4\,\pi^2\,f^2\,f_0}.$$

Nun wenden wir den Vertauschungssatz auf die Korrespondenz $d(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad D(f)$ an. Wegen $d(-f) = S(f)$ muss die inverse Fourier-Transformation von $S(f)$ gerade $D(t)$ sein

$$S(f) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s(t) = D(t) = A\,\frac{\cos(2\,\pi\,t\,f_0)-\cos(6\,\pi\,t\,f_0)}{4\,\pi^2\,t^2\,f_0}.$$

Lösung 18.8

a) Da die Zeitfunktion s gerade ist, ist die Fourier-Transformation S von s rein reell und gerade und lässt sich mit der Kosinus-Transformation berechnen.

b) Die Fourier-Transformation lässt sich entweder mit der allgemeinen Integralformel

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}\mathrm{d}\,t$$

oder mithilfe der Kosinustransformationsformel

$$S(f) = 2\int_{0}^{\infty} s(t)\cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}\,t$$

berechnen. In beiden Fällen verläuft die Berechnung ähnlich. Bei der Kosinustransformation betrachten wir die konstante Funktion $s(t) = A$ in den Grenzen zwischen 0 und T

$$S(f) = 2\int_{0}^{T} A\cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}\,t.$$

Den konstanten Faktor A können wir vor das Integral ziehen

$$S(f) = 2A \int_0^T \cos(2\pi f t)\mathrm{d}t.$$

Mit der Stammfunktion

$$\int \cos(a x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(a x)}{a} + C$$

erhalten wir

$$S(f) = 2A \frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f}\Big|_0^T = A \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}.$$

c) Das Standardrechteck mit $A = 1$ und $T = 1$ hat die Fourier-Transformation

$$\frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}.$$

Beim allgemeinen Rechteck beeinflusst T die „Periode“ und A die „Amplitude“ der Fourier-Transformation.

Lösung 18.9

a)

b) Da die Zeitfunktion s gerade ist, ist die Fourier-Transformation S von s rein reell und gerade und lässt sich mit der Kosinustransformation berechnen.

c) Die Berechnung mithilfe der der Kosinus-Transformation führt auf das Integral

$$S(f) = 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \cos(2\pi f t)\mathrm{d}t$$

das wir zwar mit einer Stammfunktion lösen können. Wir wollen diesen Lösungsansatz nicht weiterverfolgen, da die Lösung mithilfe der allgemeinen Transformationsformel

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t$$

eleganter ist. Wir benötigen zwar zwei Integrale

$$S(f) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-(-t)} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t,$$

dafür lassen sich die beiden Exponentialfunktionen im Integrand jeweils zusammenfassen

$$S(f) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t$$

und mithilfe der Stammfunktion

$$\int \mathrm{e}^{a x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{a x}}{a} + C$$

lösen

$$S(f) = \frac{\mathrm{e}^{t-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{\mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{-1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f}\bigg|_{0}^{\infty}.$$

Mit den beiden Grenzwerten

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{t-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{t}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \lim_{t\to-\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{t}}_{\to 0}\underbrace{\frac{\cos(2\,\pi\,f\,t)-\mathrm{i}\sin(2\,\pi\,f\,t)}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f}}_{\text{beschränkt}} = 0$$

und

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{-1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f\,t}}{-1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \lim_{t\to\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{\to 0}\underbrace{\frac{\cos(2\,\pi\,f\,t)-\mathrm{i}\sin(2\,\pi\,f\,t)}{-1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f}}_{\text{beschränkt}} = 0$$

ergibt sich

$$S(f) = \frac{1}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} + \frac{-1}{-1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \frac{1}{1-\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\,2\,\pi\,f} = \frac{2}{1+4\,\pi^2\,f^2}.$$

Lösung 18.10

a) Da die Zeitfunktion s gerade ist, ist die Fourier-Transformation S von s rein reell und gerade und lässt sich mit der Kosinus-Transformation berechnen

$$S(f) = 2\int_0^\infty s(t)\cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}t$$

Dazu betrachten wir die Funktion $s(t) = A - \frac{A}{a}t$ in den Grenzen zwischen 0 und a

$$S(f) = 2\int_0^a \left(A - \frac{A}{a}t\right)\cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}t.$$

Das Integral zerlegen wir in zwei Teile und ziehen jeweils die konstanten Faktoren vor das Integral

$$S_1(f) = 2A\int_0^a \cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}t \text{ und } S_2(f) = -2\,\frac{A}{a}\int_0^a t\cos(2\,\pi\,f\,t)\mathrm{d}t.$$

Mit den Stammfunktion

$$\int\cos(a\,x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(a\,x)}{a} + C \text{ und } \int x\cos(a\,x)\mathrm{d}x = \frac{x\sin(a\,x)}{a} + \frac{\cos(a\,x)}{a^2} + C$$

erhalten wir

$$S_1(f) = 2\,A\,\frac{\sin(2\,\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}\bigg|_0^a = 2\,A\,\frac{\sin(2\,\pi\,f\,a)}{2\,\pi\,f}$$

und

$$\begin{aligned} S_2(f) &= -2\,\frac{A}{a}\left(\frac{t\sin(2\,\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}\bigg|_0^a + \frac{\cos(2\,\pi\,f\,t)}{4\,\pi^2\,f^2}\bigg|_0^a\right) \\ &= -2\,\frac{A}{a}\left(\frac{a\sin(2\,\pi\,f\,a)}{2\,\pi\,f} + \frac{\cos(2\,\pi\,f\,a)}{4\,\pi^2\,f^2} - \frac{1}{4\,\pi^2\,f^2}\right). \end{aligned}$$

Wenn wir $S_1(f)$ und $S_2(f)$ zusammen fassen, dann kürzen sich die Sinusglieder weg

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f) = -A\,\frac{\cos(2\,\pi\,f\,a) - 1}{2\,\pi^2\,f^2\,a}.$$

b) Da $S(f)$ rein reell und positiv ist stimmen $|S(f)|$ und $S(f)$ überein.

c) Den Grenzwert kann man mit der Regel von Bernoulli de L'Hospital berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{-\cos(2\,\pi\,f\,a)+1}{2\,\pi^2\,f^2\,a^2} &= \lim_{a\to 0}\frac{2\,\pi\,f\sin(2\,\pi\,f\,a)}{4\,\pi^2\,f^2\,a}\\ &= \lim_{a\to 0}\frac{4\,\pi^2\,f^2\cos(2\,\pi\,f\,a)}{4\,\pi^2\,f^2} = 1.\end{aligned}$$

Da s im Grenzwert gegen δ strebt muss S gegen 1 gehen.

Lösung 18.11

19 Laplace-Transformation

Lösung 19.1

a) Zur Bestimmung der Laplace-Transformation von $f_1(t) = \sin(\omega t)$ verwendet man den Ähnlichkeitssatz:

$$\sin t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2+1} \quad \Longrightarrow \quad \sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

b) Wendet man den Dämpfungssatz auf das Ergebnis von Teilaufgabe a) an, so erhält man die Laplace-Transformation von $f_2(t) = \mathrm{e}^{-s_0 t} \sin(\omega t)$:

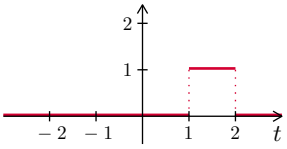
$$\sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-s_0 t} \sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{(s+s_0)^2+\omega^2}.$$

c) Zur Bestimmung der Laplace-Transformation von $f_3(t) = t \sin(\omega t)$ wendet man die Linearität und den Differenziationssatz im Bildbereich auf das Ergebnis von Teilaufgabe a) an:

$$\sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \Longrightarrow \quad t \sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

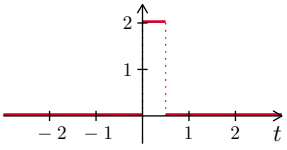
Lösung 19.2

a) Bei der abgebildeten Funktion handelt es sich um ein nach Rechts verschobenes Standardrechteck. Nach dem Zeitverschiebungssatz gilt also



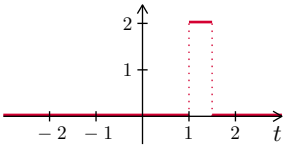
$$f_1(t) = r(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad = \mathrm{e}^{-s} R(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-2s}}{s}.$$

b) Die abgebildete Funktion entsteht durch eine Skalierung der Funktionswerte und durch eine Skalierung der t-Werte aus dem Standardrechteck. Auf Grund der Linearität und des Ähnlichkeitssatzes gilt also



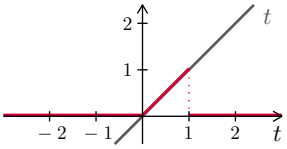
$$f_2(t) = 2r(2t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\,\frac{1}{2} R\left(\frac{s}{2}\right) = 2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}}{s}.$$

c) Mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b) liefert der Zeitverschiebungssatz:



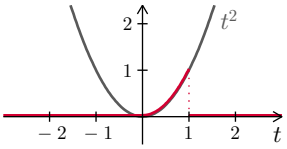
$$f_3(t) = f_2(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-s} F_2(s) = 2\,\frac{\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-\frac{3s}{2}}}{s}.$$

d) Die Laplace-Transformation dieser Funktion liefert der Satz über die Differenziation im Bildbereich bzw. der Multiplikationssatz:



$$f_4(t) = t\,r(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -R'(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s} - s\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2}.$$

e) Bei dieser Funktion können wir zur Bestimmung der Laplace-Transformation die Differenziation im Bildbereich bzw. den Multiplikationssatz auf das Ergebnis aus Aufgabenteil d) anwenden:

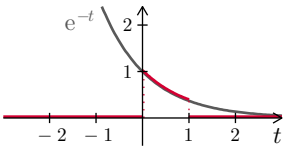


$$f_5(t) = t\,f_4(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-s} - s\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2}\right).$$

Die Quotientenregel ergibt:

$$f_5(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2 - 2\,\mathrm{e}^{-s} - 2\,s\,\mathrm{e}^{-s} - s^2\,\mathrm{e}^{-s}}{s^3}.$$

f) Zur Transformation dieser Funktion lässt sich der Dämpfungssatz anwenden:



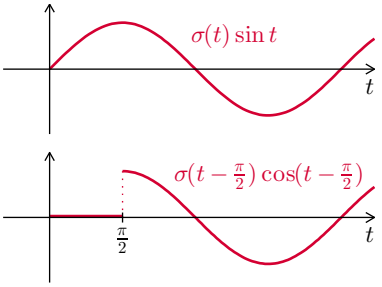
$$f_6(t) = \mathrm{e}^{-t}\,r(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad R(s+1) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s-1}}{s+1}.$$

Lösung 19.3

Bei der Laplace-Transformation müssen wir bei der Zeitverschiebung beachten, dass die Funktionswerte für negative Zeiten null sind. Die Beziehung

$$\sin t = \cos\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

gilt also nur für $t \geq \frac{\pi}{2}$.



Lösung 19.4

a) **Möglichkeit 1:** Lösung mit Integrationssatz im Zeitbereich
Wir können die Bildfunktion zerlegen in

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1}$$

und dann den Satz für die Integration im Zeitbereich anwenden. Mit der bekannten Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-1}$$

erhalten wir

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\mathrm{e}^{\tau}\right]_0^t = \mathrm{e}^{t} - 1.$$

Möglichkeit 2: Lösung mit Korrespondenztabelle
Laut Korrespondenztabelle gilt

$$\mathrm{e}^{a\,t} - 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a}{s(s-a)}.$$

Wir haben es hier mit dem Spezialfall $a = 1$ zu tun.

b) **Möglichkeit 1:** Lösung mit Integrationssatz im Zeitbereich
Wir können die Bildfunktion zerlegen in

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s-1)}$$

und dann den Satz für die Integration im Zeitbereich auf das Ergebnis von Teilaufgabe a) anwenden. Mit der Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{t} - 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s(s-a)}$$

erhalten wir

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s-1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int_0^t (\mathrm{e}^{\tau} - 1)\,\mathrm{d}\tau = \left[\mathrm{e}^{\tau} - \tau\right]_0^t = \mathrm{e}^{t} - t - 1.$$

Möglichkeit 2: Lösung mit Korrespondenztabelle
Laut Korrespondenztabelle gilt

$$\mathrm{e}^{a\,t} - a\,t - 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a^2}{s^2(s-a)}.$$

Wir haben es hier mit dem Spezialfall $a = 1$ zu tun.

c) Zur Bestimmung der Rücktransformation verwenden wir die bekannte Korrespondenz

$$\sin(a\,t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Möglichkeit 1: Lösung mit Integrationssatz im Zeitbereich
Mit dem Integrationssatz im Zeitbereich ergibt sich zunächst

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int_0^t \sin(a\,\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\left[-\cos(a\,\tau)\right]_0^t = \frac{1}{a}\left[1 - \cos(a\,t)\right].$$

Nun wenden wir den Integrationssatz im Zeitbereich auf das Zwischenergebnis nochmals an

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{a}{s(s^2 + a^2)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{a}\int_0^t (1 - \cos(a\,\tau))\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\left[\tau - \frac{1}{a}\sin(a\,\tau)\right]_0^t = \frac{1}{a}\left[t - \frac{1}{a}\sin(a\,t)\right].$$

Aus der Linearität folgt dann

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{a^2}\,t - \frac{1}{a^3}\,\sin(a\,t).$$

Möglichkeit 2: Lösung mit Partialbruchzerlegung
Bei der Partialbruchzerlegung verwenden wir den Ansatz

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C\,s+D}{s^2+a^2} = \frac{A\,s^3 + a^2\,A\,s + B\,s^2 + a^2\,B + C\,s^3 + D\,s^2}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} s^0 & : & & a^2\,B & & & = & 1 \\ s^1 & : & a^2\,A & & & & = & 0 \\ s^2 & : & & B & + & D & = & 0 \\ s^3 & : & A & & + & C & = & 0 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = 0$, $B = \dfrac{1}{a^2}$, $C = 0$ und $D = -\dfrac{1}{a^2}$. Dadurch können wir die Rücktransformation bestimmen

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^3}\,\frac{a}{s^2+a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{a^2}\,t - \frac{1}{a^3}\,\sin(a\,t).$$

d) Die Rücktransformation lässt sich durch Partialbruchzerlegung bestimmen. Dafür ermittelt man zunächst die Nullstellen des Nenners

$$s^2 - 4\,s + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 1, s_2 = 3$$

und verwendet dann den Ansatz

$$F(s) = \frac{s}{s^2-4\,s+3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} = \frac{A\,s - 3\,A + B\,s - B}{(s-1)(s-3)}.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} s^0 & : & -3\,A & - & B & = & 0 \\ s^1 & : & A & + & B & = & 1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = -\dfrac{1}{2}$ und $B = \dfrac{3}{2}$ liefert die Rücktransformation

$$F(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s-3} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3\,t}.$$

e) Bei der Bildfunktion

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+4\,s+8}$$

hat der Nenner keine reellen Nulstellen und die Partialbruchzerlegung führt nicht zum Erfolg. Man kann $F(s)$ jedoch durch quadratisches Ergänzen und geschickte Umformungen so zerlegen, dass man die einzelnen Bestandteile mit Hilfe der Korrespondenzen

$$\frac{a}{(s-b)^2+a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{b\,t}\sin(a\,t) \text{ und } \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{b\,t}\cos(a\,t)$$

zurück transformieren kann. Es gilt

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2+4} = \frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{1}{(s+2)^2+4} = \frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^2+4}.$$

und somit

$$F(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-2t}\cos(2t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t).$$

f) Die Funktion

$$F(s) = \frac{a^2}{s^4 - a^4}$$

lässt sich in Partialbrüche zerlegen

$$\frac{a^2}{s^4-a^4} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s+a} + \frac{C+Ds}{s^2+a^2}.$$

Für den Koeffizientenvergleich bringen wir alles auf einen Bruch

$$\frac{A\,s^3 + a\,A\,s^2 + a^2\,A\,s + a^3\,A + B\,s^3 + a^2\,B\,s - a\,B\,s^2 - a^3\,B + C\,s^2 + D\,s^3 - a^2\,C - a^2\,D\,s}{(s-a)(s+a)(s^2+a^2)}$$

und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcrcl}
s^0 & : & a^3\,A & - & a^3\,B & - & a^2\,C & & = & a^2 \\
s^1 & : & a^2\,A & + & a^2\,B & & & - \; a^2\,D & = & 0 \\
s^2 & : & a\,A & - & a\,B & + & C & & = & 0 \\
s^3 & : & A & + & B & + & & D & = & 0
\end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = \frac{1}{4\,a}$, $B = -\frac{1}{4\,a}$, $C = -\frac{1}{2}$ und $D = 0$. Dadurch können wir die Rücktransformation bestimmen

$$F(s) = \frac{1}{4\,a}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{4\,a}\frac{1}{s+a} - \frac{1}{2\,a}\frac{a}{s^2+a^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{4\,a}\mathrm{e}^{a\,t} - \frac{1}{4\,a}\mathrm{e}^{-a\,t} - \frac{1}{2\,a}\sin(a\,t).$$

Lösung 19.5

Für die Störfunktion verwenden wir die Bezeichnung $f(t) = t\,(\sigma(t) - \sigma(t-1))$ und transformieren die Differenzialgleichung in den Bildbereich:

$$\dot{x} + x = f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s\,X(s) - x(0) + X(s) = F(s).$$

Mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ ergibt sich

$$s\,X(s) + X(s) = F(s) \quad \Longrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+1}\,F(s).$$

Das Problem können wir nun entweder dadurch lösen, dass wir die Laplace-Transformation von f explizit bestimmen oder das Problem mit dem Faltungssatz lösen.

Möglichkeit 1: Lösung mit Faltungssatz

Zur Lösung mit dem Faltungssatz benötigen wir die Rücktransformation

$$\frac{1}{s+1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-t}.$$

Zur Berechnung der Faltung haben wir zwei Möglichkeiten, entweder $x(t) = \mathrm{e}^{-t} \star f(t)$ oder $x(t) = f(t) \star \mathrm{e}^{-t}$. Die einzelnen Lösungsschritte für die zweite Variante illustrieren wir im Details. Bei der ersten Variante verlaufen die Berechnungen in ähnlicher Weise. Die Faltung berechnen wir durch

$$x(t) = f(t) \star \mathrm{e}^{-t} = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau.$$

Dabei sind zwei Fälle zu beachten. Für $0 \le t \le 1$ gilt:

$$x(t) = \int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t}\,[(\tau - 1)\mathrm{e}^{\tau}]_0^t = t - 1 + \mathrm{e}^{-t}.$$

Dabei haben wir die Formel

$$\int x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = (x - 1)\mathrm{e}^{x} + C$$

verwendet. Wenn t größer als 1 ist folgt

$$x(t) = \int_0^1 \tau\,\mathrm{e}^{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t} \int_0^1 \tau\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t}\,[(\tau - 1)\mathrm{e}^{\tau}]_0^1 = \mathrm{e}^{-t}.$$

Insgesamt gilt also

$$x(t) = \begin{cases} t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Mithilfe der Einheitssprungfunktion σ erhalten wir die Darstellung

$$x(t) = \left(t - 1 + \mathrm{e}^{-t}\right)(\sigma(t) - \sigma(t-1)) + \mathrm{e}^{-t}\,\sigma(t-1) = -(t-1)\sigma(t-1) + t - 1 + \mathrm{e}^{-t}.$$

Möglichkeit 2: Lösung mit Laplace-Transformation von f
Die Laplace-Transformation von f lässt sich aus der bekannten Korrespondenz für das Rechteck

$$r(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad R(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s}$$

mithilfe des Differenziationssatzes im Bildbereich ermitteln

$$f(t) = t\,r(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} R(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s}\right) = \frac{-s\,\mathrm{e}^{-s} + 1 - \mathrm{e}^{-s}}{s^2}.$$

Damit folgt

$$X(s) = \frac{1}{s+1}\,F(s) = \frac{1}{s+1}\left(-\mathrm{e}^{-s}\,\frac{s+1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) = -\mathrm{e}^{-s}\,\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Der erste Summand lässt sich mit dem Dämpfungssatz zurück transformieren

$$\frac{1}{s^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-s}\,\frac{1}{s^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (t-1)\sigma(t-1).$$

Den zweiten Summanden zerlegen wir durch Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A + B\,s}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{A + A\,s + B\,s + B\,s^2 + C\,s^2}{s^2(s+1)}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccccc} s^2 & : & & & B & + & C & = & 0 \\ s^1 & : & A & + & B & & & = & 0 \\ s^0 & : & A & & & & & = & 1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Somit erhalten wir die Lösung im Zeitbereich durch Rücktransformation der einzelnen Summanden aus der Linearität:

$$X(s) = -\mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s^2} + \frac{1-s}{s^2} + \frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t) = -(t-1)\sigma(t-1) + t - 1 + \mathrm{e}^{-t}.$$

Lösung 19.6

Für die Störfunktion verwenden wir die Bezeichnung $f(t) = \mathrm{e}^{T-t}\,\sigma(t-T)$. und transformieren die Differenzialgleichung in den Bildbereich:

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2\,X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0) + s\,X(s) - x(0) = F(s).$$

Mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ ergibt sich

$$s^2\,X(s) - s + s\,X(s) - 1 = F(s) \quad \Longrightarrow \quad X(s) = \frac{s+1}{s^2+s} + F(s)\,\frac{1}{s^2+s}.$$

Es gilt $\dfrac{1}{s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 1$. Die Rücktransformation von $\dfrac{1}{s^2+s}$ lässt sich mit Hilf einer Partialbruchzerlegung ermitteln oder aus einer Korrespondenztabelle ablesen

$$\frac{a}{s(s-a)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{a\,t} - 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{s(s+1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad -\mathrm{e}^{-t} + 1.$$

Die Rücktransformation von $F(s)\,\dfrac{1}{s^2+s}$ können wir nun entweder dadurch lösen, dass wir die Laplace-Transformation von f explizit bestimmen oder das Problem mit dem Faltungssatz lösen.

Möglichkeit 1: Lösung mit Faltungssatz

Zur Berechnung der Faltung haben wir zwei Möglichkeiten, entweder $\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) \star f(t)$ oder $f(t) \star \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$. Mit der zweiten Variante folgt

$$f(t) \star \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) = \int_0^t f(\tau)\left(1-\mathrm{e}^{-t+\tau}\right)\mathrm{d}\tau.$$

Für $0 \le t \le T$ ist $f(\tau)$ für alle τ-Werte zwischen 0 und t null. Es genügt somit t-Werte größer als T zu betrachten:

$$f(t) \star \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) = \int_T^t \mathrm{e}^{T-\tau}\left(1-\mathrm{e}^{-t+\tau}\right)\mathrm{d}\tau = \int_T^t \left(\mathrm{e}^{T-\tau} - \mathrm{e}^{T-t}\right)\mathrm{d}\tau = 1 - (1+t-T)\mathrm{e}^{T-t}.$$

Insgesamt gilt also

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le T, \\ 1 + 1 - (1+t-T)\mathrm{e}^{T-t} & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Mithilfe der Einheitssprungfunktion σ erhalten wir die Darstellung

$$x(t) = 1 + \left(1 - (1+t-T)\mathrm{e}^{T-t}\right)\sigma(t-T).$$

Möglichkeit 2: Lösung mit Laplace-Transformation von f
Die Laplace-Transformation von f lässt sich aus der bekannten Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{-t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+1}$$

mithilfe des Zeitverschiebungssatzes ermitteln

$$f(t) = \mathrm{e}^{-(t-T)}\,\sigma(t-T) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) = \mathrm{e}^{-Ts}\,\frac{1}{s+1}.$$

Damit folgt

$$X(s) = \frac{1}{s} + \mathrm{e}^{-Ts}\,\frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Die Rücktransformation von $\dfrac{1}{s(s+1)^2}$ berechnen wir mit Hilf einer Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{(s+1)^2} = \frac{As^2+2As+A+Bs+Cs^2}{s(s+1)^2}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcl} s^2 & : & A & & & + & C & = & 0 \\ s^1 & : & 2A & + & B & & & = & 0 \\ s^0 & : & A & & & & & = & 1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = 1$, $B = -2$ und $C = -1$. Dadurch erhalten wir die Rücktransformation

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - 2\,\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{s}{(s+1)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 - 2t\,\mathrm{e}^{-t} - (1-t)\mathrm{e}^{-t} = 1 - (1+t)\mathrm{e}^{-t}.$$

Der letzte Teil ergibt sich aus dem Verschiebungssatz

$$\mathrm{e}^{-Ts}\,\frac{1}{s(s+1)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \big(1 - (1+t-T)\mathrm{e}^{T-t}\big)\,\sigma(t-T).$$

Insgesamt gilt somit

$$x(t) = 1 + \big(1 - (1+t-T)\mathrm{e}^{T-t}\big)\,\sigma(t-T).$$

Lösung 19.7
Wir transformieren die gesuchten Funktionen und ihre Ableitungen, unter Berücksichtigung der Anfangswerte, in den Bildbereich:

$$\begin{array}{llll} x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s), & & y(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s), \\ \dot{x}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sX(s), & & \dot{y}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sY(s), \\ \ddot{x}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2X(s) - 1, & & \ddot{y}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2Y(s). \end{array}$$

Aus dem Anfangswertproblem im Zeitbereich erhalten wir so ein lineares Gleichungssystem im Bildbereich:

$$\begin{array}{rcrcrcl} s^2X - 1 & + & 2sX & - & sY & = & 0 \\ s^2Y & + & sX & & & = & 0 \end{array}$$

Wir bringen das lineare Gleichungssystem in Normalform und eliminieren Y, indem wir die erste Gleichung mit s multiplizieren und zur zweiten Gleichung addieren:

$$\begin{array}{rcrcll} (s^2+2\,s)X & - & s\,Y & = & 1 & |\cdot s \\ s\,X & + & s^2\,Y & = & 0 & \end{array}$$

Es ergibt sich

$$X(s) = \frac{1}{s^2+2\,s+1} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = -\frac{1}{s}\,X(s) = \frac{-1}{s\,(s^2+2\,s+1)}.$$

Die Rücktransformation von $X(s)$ können wir direkt ermitteln:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Für die Rücktransformation von $Y(s)$ verwenden wir eine Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{A\,s^2+2\,A\,s+A+B\,s^2+B\,s+C\,s}{s(s+1)^2}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrl} s^2 & : & A & + & B & & = & 0 \\ s^1 & : & 2\,A & + & B & + & C & = & 0 \\ s^0 & : & A & & & & = & -1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A=-1$, $B=1$ und $C=1$ folgt

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = -1+\mathrm{e}^{-t}+t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Lösung 19.8

Für die Laplace-Transformation einer Funktion mit Periode T gilt die Formel

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T\,s}} \underbrace{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}\,t}_{F_0(s)}.$$

Dabei entspricht das Integral der Laplace-Transformierten des auf dem Intervall $[0;T]$ definierten periodischen Prototyps

$$F_0(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f_0(t) = \begin{cases} \sin(\omega\,t) & \text{für} \quad 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad \frac{T}{2} \le t \le T, \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T}.$$

Der periodische Prototyp f_0 lässt sich mithilfe der Einheitssprungfunktion σ darstellen

$$f_0(t) = \sin(\omega\,t)\left(\sigma(t) - \sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)\right).$$

Der erste Teil lässt sich direkt transformieren

$$\sin(\omega\,t)\,\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Für den zweiten Teil verwenden wir

$$-\sin(\omega t)\,\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)=\sin(\omega t-\pi)\,\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)=\sin\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right).$$

Dadurch lässt sich die Laplace-Transformation mit dem Zeitverschiebungssatz ermitteln

$$\sin\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$f(t)\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad \frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Die gesuchte Formel ergibt sich durch die Vereinfachung

$$\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}\right)}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}.$$

Lösung 19.9

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort g ist die Übertragungsfunktion G

$$g(t)\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad G(s)=\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s^2+s}.$$

Durch Partialbruchzerlegung lässt sich die Rücktransformation durchführen. Dazu verwenden wir für den zweiten Faktor den Ansatz

$$\frac{1}{s^2+s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}=\frac{A(s+1)+Bs}{s(s+1)}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccc} s^1 & : & A & + & B & = & 0\\ s^0 & : & A & & & = & 1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A=1$ und $B=-1$. Die Rücktransformation ergibt

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad 1-\mathrm{e}^{-t}.$$

Zur Berechnung der Impulsantwort wenden wir den Zeitverschiebungssatz an

$$G(s)=\frac{\mathrm{e}^{-Ts}}{s^2+s}\quad\circ\!\!-\!\!\bullet\quad g(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-(t-T)}\right)\sigma(t-T).$$

Das Ausgangssignal o zum Eingangssignal i lässt sich durch Faltung mit der Impulsantwort berechnen

$$o(t)=g(t)\star i(t)=\int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{-(\tau-T)}\right)\sigma(\tau-T)\,(\sigma(t-\tau)-\sigma(t-\tau-T))\,\mathrm{d}\tau.$$

Die Funktion g ist für alle τ-Werte kleiner als T null. Das Rechteck $\sigma(t-\tau)-\sigma(t-\tau-T)$ ist für alle τ-Werte außerhalb des Intervalls $[t-T;t]$ null. Somit sind für die Faltung nur zwei Fälle zu berücksichtigen. Für $T\le t\le 2T$ gilt

$$o(t)=\int_T^t\left(1-\mathrm{e}^{-(\tau-T)}\right)\mathrm{d}\tau=\left[\tau+\mathrm{e}^{-(\tau-T)}\right]_T^t=t+\mathrm{e}^{-(t-T)}-T-1$$

und für $t > 2T$ ergibt sich

$$o(t) = \int_{t-T}^{t} \left(1 - \mathrm{e}^{-(\tau - T)}\right) \mathrm{d}\tau = \left[\tau + \mathrm{e}^{-(\tau - T)}\right]_{t-T}^{t} = T + \mathrm{e}^{-(t-T)} - \mathrm{e}^{-(t-2T)}.$$

20 z-Transformation

Lösung 20.1

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die z-Transformation der Folge (f_k) zu berechnen.
1. Möglichkeit: Für die Folge (σ_k) kennen wir bereits die Korrespondenz

$$(\sigma_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tilde{F}(z) = \frac{z}{z-1}$$

Für unsere Folgenglieder gilt

$$f_k = (-1)^k = (-1)^{-k} \cdot \sigma_k,$$

dadurch können wir den Dämpfungssatz mit $a = -1$ verwenden. Da im Zeitbereich die Folgenglieder mit $(-1)^{-k}$ multipliziert werden, müssen wir im Bildbereich z durch $-z$ ersetzen:

$$(f_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tilde{F}(-z) = \frac{-z}{-z-1} = \frac{z}{z+1}.$$

2. Möglichkeit: Laut Definition besitzt die alternierende Zahlenfolge $(f_k) = (-1)^k$ die z-Transformierte

$$F(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} - \ldots \pm \frac{1}{z^k} \pm \ldots$$

Wenn wir die Terme mit positivem und mit negativem Vorzeichen zusammenfassen

$$F(z) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots\right)$$

dann lässt sich der Ausdruck mithilfe der geometrischen Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

für $q = \dfrac{1}{z^2}$ weiter vereinfachen

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2}{z^2-1}\,\frac{z-1}{z} = \frac{z}{z+1}.$$

Lösung 20.2

Die z-Transformation der Zahlenfolge, bei der die ersten 6 Glieder den Wert 1 haben und alle anderen Glieder null sind, lautet

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_5(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich mithilfe der geometrischen Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

für $q = \dfrac{1}{z}$ vereinfachen zu

$$F_5(z) = \frac{1-\frac{1}{z^6}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z^6-1}{z^6-z^5}.$$

Für eine beliebige natürliche Zahl m folgt entsprechend

$$F_m(z) = \frac{1 - \frac{1}{z^{m+1}}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z^{m+1} - 1}{z^{m+1} - z^m}.$$

Im Grenzfall für $m \to \infty$ erhalten wir die bekannte Korrespondenz für die Folge (σ_k)

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \lim_{m\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^{m+1}}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

Dabei müssen wir $|z| > 1$ voraussetzen.

Lösung 20.3

Für $|q| < 1$ lautet die Formel für die geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Durch Ableiten ergibt sich

$$1 + 2\,q + 3\,q^2 + \ldots + m\,q^{m-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Die z-Transformation der Folge (f_k) ergibt

$$(f_k) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, m, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \frac{5}{z^5} + \ldots + \frac{m}{z^m} + \ldots$$

Um die Formel anwenden zu können, verwenden wir die Umformung

$$F(z) = \frac{1}{z}\left(1 + 2\,\frac{1}{z} + 3\,\frac{1}{z^2} + 4\,\frac{1}{z^3} + 5\,\frac{1}{z^4} + \ldots + m\,\frac{1}{z^{m-1}} + \ldots\right)$$

Mit $q = \frac{1}{z}$ erhalten wir

$$F(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Lösung 20.4

Für die Folge (σ_k) kennen wir bereits die Korrespondenz

$$(\sigma_k) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots, 1, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tilde{F}(z) = \frac{z}{z-1}$$

Für unsere Folgenglieder gilt

$$f_k = \mathrm{e}^{-\lambda k} = \left(\mathrm{e}^{\lambda}\right)^{-k} \cdot \sigma_k,$$

dadurch können wir den Dämpfungssatz mit $a = \mathrm{e}^{\lambda}$ anwenden. Da im Zeitbereich die Folgenglieder mit $\left(\mathrm{e}^{\lambda}\right)^{-k}$ multipliziert werden, müssen wir im Bildbereich z durch $\mathrm{e}^{\lambda}\,z$ ersetzen:

$$(f_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tilde{F}(\mathrm{e}^{\lambda}\,z) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}\,z}{\mathrm{e}^{\lambda}\,z - 1} = \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

Lösung 20.5

Die ersten Folgenglieder lauten

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = \alpha,\ f_3 = \alpha^2 - \alpha + 1,\ f_4 = \alpha^3 - 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha.$$

Zur Bestimmung einer expliziten Lösungsformel transformieren wir die Folge und die um ein bzw. zwei Indizes verschobene Folge in den Bildbereich

$$\begin{array}{lcrcl} f_k & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(z) & & \\ f_{k+1} & \circ\!\!-\!\!\bullet & z\,(F(z) - f_0) & = & z\,F(z) \\ f_{k+2} & \circ\!\!-\!\!\bullet & z^2\left(F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z}\right) & = & z^2\left(F(z) - \frac{1}{z}\right) \end{array}$$

Im Bildbereich ergibt sich aus der Differenzengleichung die Gleichung

$$f_{k+2} = \alpha\, f_{k+1} + (1-\alpha) f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^2\left(F(z) - \frac{1}{z}\right) = \alpha\, z\, F(z) + (1-\alpha)F(z).$$

mit der Lösung

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - \alpha\, z - 1 + \alpha}.$$

Die Rücktransformation versuchen wir auf die bekannte Korrespondenz

$$\left(a^k\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

zurückzuführen. Dazu berechnen wir ähnlich wie bei einer Partialbruchzerlegung die Nullstellen im Nenner

$$z^2 - \alpha z - 1 + \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)}}{2} = \frac{\alpha \pm (\alpha - 2)}{2} = 1,\ \alpha - 1$$

und arbeiten mit dem Ansatz

$$\frac{z}{z^2 - \alpha z - 1 + \alpha} = \frac{A\, z}{z-1} + \frac{B\, z}{z + 1 - \alpha} = \frac{A\, z(z + 1 - \alpha) + B\, z(z-1)}{(z-1)(z+1-\alpha)}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich

$$\frac{z}{z^2 - \alpha z - 1 + \alpha} = \frac{A\, z^2 + A(1-\alpha)z + B\, z^2 - B\, z}{(z-1)(z+1-\alpha)}$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcrcrcl} z^2 & : & & A & + & B & = & 0 \\ z^1 & : & (1-\alpha)A & - & B & = & 1 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = \dfrac{1}{2-\alpha}$ und $B = -\dfrac{1}{2-\alpha}$. Dadurch erhalten wir durch Rücktransformation die gesuchte Formel

$$F(z) = \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-(\alpha-1)}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (f_k) = \frac{1}{2-\alpha}\left(1 - (\alpha-1)^k\right).$$

Lösung 20.6

Die Differenzengleichung lässt sich so auflösen, dass die Folgenglieder rekursiv berechnet werden können

$$f_{k+2} = a^2 f_k \quad \Longrightarrow \quad f_2 = a^2,\ f_3 = 0,\ f_4 = a^4,\ f_5 = 0,\ f_6 = a^6,\ f_7 = 0.$$

Daraus vermuten wir für ungerades k, dass f_k null ist und für gerades k die Formel $f_k = a^k$. Zur Herleitung dieser expliziten Lösungsformel transformieren wir die Folge (f_k) und die um zwei Indizes verschobene Folge (f_{k+2}) in den Bildbereich

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) \quad \Longrightarrow \quad f_{k+2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^2 \left(F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z} \right) = z^2 \left(F(z) - 1 \right).$$

Aus der Differenzengleichung ergibt sich eine Gleichung für $F(z)$ im Bildbereich

$$f_{k+2} = a^2 f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^2 \left(F(z) - 1 \right) = a^2 F(z).$$

Die Lösung im Bildbereich lautet

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - a^2}.$$

Bei der Rücktransformation versuchen wir auf die bekannte Korrespondenz

$$\left(a^k \right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

zurückzugreifen. Dazu verwenden wir einen ähnlichen Ansatz wie bei der Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^2}{z^2 - a^2} = \frac{A\,z}{z-a} + \frac{B\,z}{z+a}.$$

Der Koeffizientenvergleich

$$\frac{z^2}{z^2 - a^2} = \frac{A\,z(z+a) + B\,z(z-a)}{(z-a)(z+a)} = \frac{A\,z^2 + a\,A + B\,z^2 - a\,B}{z^2 - a^2}$$

liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} z^2 & : & A & + & B & = & 1 \\ z^0 & : & a\,A & - & a\,B & = & 0 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$. Somit folgt

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z+a} \right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (f_k) = \frac{1}{2} \left(a^k + (-a)^k \right).$$

Für ungerades k gilt also tatsächlich $f_k = 0$ und für gerades k ergibt sich wie vermutet $f_k = a^k$.

Lösung 20.7

z-Transformation

$$3\,Y(z) - 2\,\frac{Y(z)}{z} = X(z) \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3 - \frac{2}{z}}$$

Impulsantwort durch Rücktransformation der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{3\,z - 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{2}{3}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (y_k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

Lösung 20.8

Die Übertragungsfunktion ist das Verhältnis von Ausgangsgröße zu Eingangsgröße im Bildbereich. Die Transformation der Eingangsfolge ergibt

$$(i_k) = a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad I(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_4}{z^4} + \ldots$$

und die Transformation der Ausgangsfolge liefert

$$(o_k) = \underbrace{0,\, 0,\, \ldots\, 0}_{m\text{-mal } 0},\, a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad O_m(z) = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m+1}} + \frac{a_2}{z^{m+2}} + \frac{a_3}{z^{m+3}} + \ldots$$

Wir können also den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{z^m}$ ausklammern

$$O_m(z) = \frac{1}{z^m}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots\right).$$

Somit erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$G_m(z) = \frac{O_m(z)}{I(z)} = \frac{\frac{1}{z^m}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots\right)}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_4}{z^4} + \ldots} = \frac{1}{z^m}.$$

Lösung 20.9

a) Die Übertragungsfunktion bestimmen wir durch Transformation der Differenzengleichung in den Bildbereich. Mit den Korrespondenzen

$$(x_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z), \qquad (y_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z), \qquad (y_{k-1}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1}\,Y(z)$$

erhalten wir

$$T\,\frac{Y(z) - \frac{1}{z}\,Y(z)}{\Delta t} + Y(z) = K\,X(z).$$

Diese Beziehung lässt sich weiter vereinfachen zu

$$\frac{T}{\Delta t}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{\Delta t}{T}\right)Y(z) = K\,X(z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{(T+\Delta t)z - T}{z}\right)Y(z) = K\,X(z).$$

Daraus lässt sich die Übertragungsfunktion ermitteln

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K\,\frac{\Delta t\, z}{(T+\Delta t)z - T}. = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{z}{z - \frac{T}{T+\Delta t}}\right).$$

b) Die Transformation der Eingangsfolge ergibt

$$(x_k) = (\delta_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 = X(z).$$

Somit folgt im Bildbereich

$$Y(z) = G(z)\,X(z) = G(z)\cdot 1 = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{z}{z - \frac{T}{T+\Delta t}}\right).$$

Die Impulsantwort erhalten wir durch Rücktransformation der Übertragungsfunktion aus der bekannten Korrespondenz

$$\frac{z}{z-a} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \left(a^k\right)$$

zu

$$Y(z) = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{z}{z-\frac{T}{T+\Delta t}}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (y_k) = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{T}{T+\Delta t}\right)^k.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch ein wenig vereinfachen zu

$$(y_k) = K\,\frac{\Delta t}{T}\left(\frac{T}{T+\Delta t}\right)^{k+1}.$$

c) Die Transformation der Eingangsfolge ergibt

$$(x_k) = (\sigma_k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-1} = X(z).$$

Somit folgt im Bildbereich

$$Y(z) = G(z)\,X(z) = G(z)\,\frac{z}{z-1} = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{z}{z-\frac{T}{T+\Delta t}}\right)\frac{z}{z-1}.$$

Wir benötigen also die Rücktransformation einer Funktion der Bauart

$$\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-1} \text{ mit } a = \frac{T}{T+\Delta t}.$$

Ähnlich wie bei einer Partialbruchzerlegung arbeiten wir mit dem Ansatz

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-1)} = \frac{A\,z}{z-a} + \frac{B\,z}{z-1} = \frac{A\,z(z-1)+B\,z(z-a)}{(z-a)(z-1)}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-1)} = \frac{A\,z^2 - A\,z + B\,z^2 - a\,B\,z}{(z-a)(z-1)}$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} z^2 & : & A & + & B & = & 1 \\ z^1 & : & -A & - & a\,B & = & 0 \end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $A = \frac{a}{a-1}$ und $B = -\frac{1}{a-1}$. Dadurch erhalten wir durch Rücktransformation die gesuchte Ausgangsfolge

$$Y(z) = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{1}{a-1}\left(\frac{a\,z}{z-a} - \frac{z}{z-1}\right)\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (y_k) = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{1}{a-1}\left(a^{k+1} - \sigma_k\right)\right).$$

Mit

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{\frac{T}{T+\Delta t}-1} = \frac{T+\Delta t}{-\Delta t}$$

ergibt sich

$$(y_k) = K\,\frac{\Delta t}{T+\Delta t}\left(\frac{T+\Delta t}{-\Delta t}\left(\left(\frac{T}{T+\Delta t}\right)^{k+1} - \sigma_k\right)\right) = -K\left(\left(\frac{T}{T+\Delta t}\right)^{k+1} - \sigma_k\right).$$

21 Elementare Zahlentheorie

Lösung 21.1
Falsch $2^4 - 1 = 15$.

Lösung 21.2
Falsch $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ ergibt 9.

Lösung 21.3

a) 1
b) 1
c) 2
d) 7
e) 7
f) 7

Lösung 21.4

a) 1
b) 1
c) 16
d) 1
e) 0
f) 0

Lösung 21.5

a) 3, 84
b) 303, 6363
c) 3003, 84084

Lösung 21.6

Lösung 21.7

a) Die multiplikative Inverse von 3 modulo 9 existiert nicht, denn die Vielfachen von 3 modulo 9 ergeben als Rest nur 0, 3 oder 6.

b) Die multiplikative Inverse von 23 modulo 100 bestimmen wir mit dem erweiterten Euklidschen Algorithmus. Dazu zerlegen wir:

$$100 = 4 \cdot 23 + 8, \quad 23 = 2 \cdot 8 + 7, \quad 8 = 1 \cdot 7 + 1.$$

Die letzte Gleichung lösen wir nach 1 auf und setzen dann Schritt für die Schritt die entsprechenden Zerlegungen ein:

$$1 = 8 - 7 = 8 - (23 - 2 \cdot 8) = 3 \cdot 8 - 23 = 3(100 - 4 \cdot 23) - 23 = 3 \cdot 100 - 13 \cdot 23.$$

Somit ist

$$1 = -13 \cdot 23 \mod 100$$

und die multiplikative Inverse von 23 modulo 100 ist $100 - 13 = 87$.

c) Die multiplikative Inverse von 13 modulo 99 bestimmen wir mit dem erweiterten Euklidschen Algorithmus. Dazu zerlegen wir:

$$99 = 7 \cdot 13 + 8, \quad 13 = 1 \cdot 8 + 5, \quad 8 = 1 \cdot 5 + 3, \quad 5 = 1 \cdot 3 + 2, \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1.$$

Die letzte Gleichung lösen wir nach 1 auf und setzen dann Schritt für die Schritt die entsprechenden Zerlegungen ein:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(8 - 5) - 5 = -3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = -3(13 - 8) + 2 \cdot 8 \\ &= 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 = 5(99 - 7 \cdot 13) - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 99 - 38 \cdot 13. \end{aligned}$$

Somit ist

$$1 = -38 \cdot 13 \mod 99$$

und die multiplikative Inverse von 13 modulo 99 ist $99 - 38 = 61$.

Lösung 21.8

Nach dem Chinesischen Restsatz benötigen wir die multiplikative Inverse von 11 modulo 31. Dazu zerlegen wir

$$31 = 2 \cdot 11 + 9 \implies 11 = 1 \cdot 9 + 2 \implies 9 = 4 \cdot 11 + 1\,.$$

Diese Gleichungen rückwärts ineinander eingesetzt liefert

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4(11 - 9) = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11 = 5(31 - 2 \cdot 11) - 4 \cdot 11 = -14 \cdot 11 + 5 \cdot 31\,.$$

Somit ist

$$[11]_{31}^{-1} = [-14]_{31} = [17]_{31}\,.$$

Außerdem benötigen wir noch die multiplikative Inverse von 31 modulo 11. Wegen

$$31 \mod 11 = 9 \mod 11$$

zerlegen wir

$$11 = 1 \cdot 9 + 2 \implies 9 = 4 \cdot 2 + 1\,.$$

Rückwärts einsetzen ergibt

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4(11 - 9) = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11\,.$$

Somit ist

$$[31]_{11}^{-1} = [5]_{11}\,.$$

Jetzt bilden wir

$$y = 1 \cdot 31 \cdot 5 + 13 \cdot 11 \cdot 17 = 155 + 2431 = 2586$$

und daraus

$$x = 2586 \mod 11 \cdot 31 = 199 \mod 341\,.$$

Lösung 21.9

Zunächst kürzen wir:

$$\frac{100!}{50!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot \ldots \cdot 90 \cdot \ldots \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51.$$

Die Anzahl der Nullen bestimmen wir indem wir die Anzahl der Primfaktoren 2 und 5 bestimmen. Die 5 ist als Primfaktor in den Zahlen

$$55,\ 60,\ 65,\ 70,\ 75,\ 80,\ 85,\ 90,\ 95,\ 100$$

enthalten. Allerdings kommt die 5 in 75 und 100 zweimal als Primfaktor vor. Insgesamt enthält die Primfaktorzerlegung somit 12 mal die 5. Der Primfaktor 2 steckt in jeder geraden Zahl mindestens einmal. Das sind sicherlich mehr als 12 Zahlen. Somit ist für die Anzahl der Nullen nur die Anzahl der Primfaktoren 5 entscheidend. Insgesamt endet die Zahl also mit 12 Nullen.

Lösung 21.10